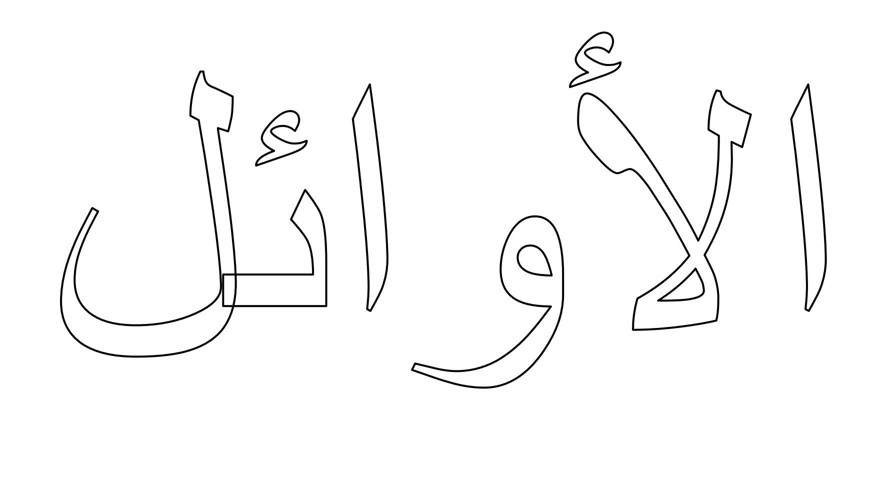


رياضيات

الصف الثانى الإعدادى

الفصل الدراسي الأول

الأستاذ / طارق عبد الحليم

الجذر التربيعى لعدد نسبى

أولاً: الجذر التربيعى للعدد ٩ تشمل الجذرين الموجب و السالب $+\sqrt{\ }$ ، $-\sqrt{\ }$

أى أن الجذر التربيعى للعدد ٩ = $\pm\sqrt{٩} = \pm ٣$

ثانياً :إذا كان $س^٢ = ٩$ فإن $س = \pm\sqrt{٩} = \pm ٣$

ثالثاً : $\sqrt{٩} = ٣$

رابعاً : $-\sqrt{٩} = -٣$

خامساً : $\sqrt{-٩}$ ليس لها معنى
(لا يوجد جذر تربيعى لعدد سالب)

تدريبـــات

(١) $\sqrt{٢٥ س^٢ ص^٦} = ٥ س ص^٣$

(٢) $\sqrt{١٦ س^٤ ص^٨} = ٤ س^٢ ص^٤$

(٣) $\sqrt{(-٣)^٢} = |-٣| = ٣$

(٤) $\sqrt{\frac{٤٩}{٨١}} = \frac{٧}{٩}$

(٥) $\sqrt{٢ \frac{٧}{٩}} = \sqrt{\frac{٢٥}{٩}} = \frac{٥}{٣}$

(٦) $\sqrt{٣٦+٦٤} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية

(١) س – ١ = ٣ حيث س ∈ ص

س – ١ = ٣ بإضافة +١ للطرفين

س – ١ + ١ = ٣ + ١

س = ٤ م.ح فى ص = { ٤ }

---

(٢) س + ٦ = ٢ حيث س ∈ ط

س + ٦ = ٢ بإضافة – ٦ للطرفين

س + ٦ – ٦ = ٢ – ٦

س = – ٤ م.ح فى ط = ∅

---

(٣) ٥س + ٧ = ٢٢ حيث س ∈ ن

٥س + ٧ = ٢٢ بإضافة – ٧ للطرفين

٥س + ٧ – ٧ = ٢٢ – ٧

٥س = ١٥ بقسمة الطرفين على ٥

$\frac{٥س}{٥} = \frac{١٥}{٥}$

س = ٣

م.ح فى ن = { ٣ }

الجذر التكعيبى لعدد نسبى

تدريبـــات

(١) $\sqrt[3]{٨} = ٢$

(٢) $\sqrt[3]{-٨} = -٢$

(٣) $-\sqrt[3]{٨} = -٢$

(٤) $\sqrt[3]{٦٤ س^{٣}} = ٤ س$

(٥) $\sqrt[3]{٢٧ س^{٦} ص^{٩}} = ٣ س^{٢} ص^{٣}$

(٦) $\sqrt[3]{٣\frac{٣}{٨}} = \sqrt[3]{\frac{٢٧}{٨}} = \frac{٣}{٢}$

(٧) $\sqrt[3]{\sqrt{٦٤}} = \sqrt[3]{٨} = ٢$

(٨) $\sqrt{\sqrt[3]{٦٤}} = \sqrt{٤} = ٢$

(٩) إذا كان $\sqrt[3]{س} = ٥$ فإن س = ١٢٥

(١٠) إذا كان $\sqrt[3]{٢٧} = \sqrt{س}$ فإن س = ٩

(١١) إذا كان $\sqrt{١٦} = \sqrt[3]{س}$ فإن س = ٦٤

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى ن

(١) $س^{٢} - ١ = ٣$ بإضافة +١ للطرفين

$س^{٢} - ١ + ١ = ٣ + ١$

$س^{٢} = ٤$ بإيجاد الجذر التربيعى للطرفين

$س = \pm\sqrt{٤} = \pm ٢$ م.ح = $\{٢ ، -٢\}$

---

(٢) $س^{٢} + ٦ = ٢$ بإضافة -٦ للطرفين

$س^{٢} + ٦ - ٦ = ٢ - ٦$

$س^{٢} = -٤$

لا يوجد جذر تربيعى لعدد سالب م.ح = $\varnothing$

---

(٣) $س^{٣} - ٢ = ٦$ بإضافة +٢ للطرفين

$س^{٣} - ٢ + ٢ = ٦ + ٢$

$س^{٣} = ٨$ بإيجاد الجذر التكعيبى للطرفين

$س = \sqrt[3]{٨} = ٢$ م.ح = $\{٢\}$

---

(٤) $٨س^{٣} - ١٢ = ١٥$ بإضافة +١٢ للطرفين

$٨س^{٣} - ١٢ + ١٢ = ١٥ + ١٢$

$٨س^{٣} = ٢٧$ بقسمة الطرفين على ٨

$\frac{٨س^{٣}}{٨} = \frac{٢٧}{٨}$

$س^{٣} = \frac{٢٧}{٨}$ بإيجاد الجذر التكعيبى للطرفين

$س = \sqrt[3]{\frac{٢٧}{٨}} = \frac{٣}{٢}$ م.ح = $\{\frac{٣}{٢}\}$

(٥) (س - ٤)^{٣} = ١٢٥

(س - ٤)^{٣} = ١٢٥ بايجاد الجذر التكعيبى للطرفين

س - ٤ = $\sqrt[٣]{١٢٥}$

س - ٤ = ٥ باضافة +٤ للطرفين

س - ٤ +٤ = ٥ +٤

س = ٩

م.ح = { ٩ }

---

(٦) (٣س - ٤)^{٣} + ٦٥ = ١

(٣س - ٤)^{٣} + ٦٥ = ١

(٣س - ٤)^{٣} +٦٥ = ١ باضافة -٦٥ للطرفين

(٣س - ٤)^{٣} +٦٥ -٦٥ = ١ -٦٥

(٣س - ٤)^{٣} = - ٦٤ بايجاد الجذر التكعيبى للطرفين

٣س - ٤ = $\sqrt[٣]{-٦٤}$

٣س - ٤ = - ٤ باضافة +٤ للطرفين

٣س - ٤ +٤ = - ٤ +٤

٣س = صفر بقسمة الطرفين على ٣

س = صفر

م.ح = { صفر }

تطبيقات على الجذور التربيعية و التكعيبية

أولاً المكعب

إذا كان مكعب طول حرفه ل فإن

(١) مساحة الوجه (على شكل مربع) =
طول الضلع × نفسه = ل × ل = ل^{٢}

(٢) المساحة الجانبية للمكعب =
مساحة الوجه × ٤ = ٤ × ل٢ = ٤ ل^{٢}

(٣) المساحة الكلية للمكعب =
مساحة الوجه × ٦ = ٦ × ل٢ = ٦ ل^{٢}

(٤) حجم المكعب = طول الحرف × نفسه × نفسه
= ل × ل × ل = ل^{٣}

ثانياً حجم الكرة = π نق^{٣} حيث نق هو طول نصف قطر الكرة

ثالثاً مساحة الدائرة = π نق^{٢}

محيط الدائرة = ٢ π نق

تدريبــــات

(١) إذا كان طول حرف مكعب ٣ سم فاحسب حجمه و مساحته الجانبية و الكلية

حجم المكعب = ل^{٣} = ٣^{٣} = ٢٧ سم^{٣}

المساحة الجانبية للمكعب =
٤ ل^{٢} = ٤ × ٣ × ٣ = ٣٦ سم^{٢}

المساحة الكلية للمكعب =
٦ ل^{٢} = ٦ × ٣ × ٣ = ٥٤ سم^{٢}

(٢) إذا كان حجم مكعب ٢١٦ سم^{٣} فاحسب طول حرفه و مساحته الجانبية

حجم المكعب = ل^{٣} = ٢١٦ بإيجاد الجذر التكعيبى للطرفين

ل = $\sqrt[٣]{٢١٦}$ = ٦ سم

المساحة الجانبية للمكعب =

٤ ل^{٢} = ٤ × ٦ × ٦ = ١٤٤ سم^{٢}

---

(٣) إناء مكعب سعته ١ لتر فاحسب طول حرفه الداخلى

١ لتر= ١٠٠٠ سم^{٣}

حجم المكعب = ل^{٣} = ١٠٠٠ بإيجاد الجذر التكعيبى للطرفين

ل = $\sqrt[٣]{١٠٠٠}$ = ١٠ سم

---

(٤) أوجد طول نصف قطر كرة حجمها ٢٨٨ π سم^{٣}

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} = ٢٨٨ π

بقسمة الطرفين على π

$\frac{٤}{٣}$ نق^{٣} = ٢٨٨ بضرب الطرفين فى $\frac{٣}{٤}$

$\frac{٣}{٤}$ × $\frac{٤}{٣}$ نق^{٣} = ٢٨٨ × $\frac{٣}{٤}$

نق^{٣} = ٢١٦ بإيجاد الجذر التكعيبى للطرفين

نق = $\sqrt[٣]{٢١٦}$ = ٦ سم

(٥) أوجد طول نصف قطر كرة حجمها ٤٨٥١ سم^{٣}

$\pi = \frac{٢٢}{٧}$

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} = ٤٨٥١

$\frac{٤}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق^{٣} = ٤٨٥١

$\frac{٨٨}{٢١}$ × نق^{٣} = ٤٨٥١ بضرب الطرفين فى $\frac{٢١}{٨٨}$

$\frac{٢١}{٨٨}$ × $\frac{٨٨}{٢١}$ × نق^{٣} = ٤٨٥١ × $\frac{٢١}{٨٨}$

نق^{٣} = $\frac{٩٢٦١}{٨}$ بإيجاد الجذر التكعيبى للطرفين

نق = $\sqrt[٣]{\frac{٩٢٦١}{٨}}$ = ٥و١٠ سم

---

(٦) أوجد طول قطر كرة حجمها ٠٤و١١٣ سم^{٣}

π = ١٤و٣

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} = ٠٤و١١٣

$\frac{٤}{٣}$ × ١٤و٣ × نق^{٣} = ٠٤و١١٣

$\frac{٣١٤}{٧٥}$ × نق^{٣} = ٠٤و١١٣ بالضرب فى $\frac{٧٥}{٣١٤}$

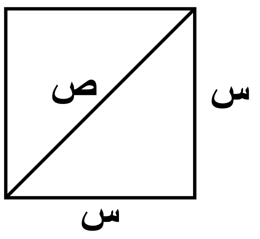
$\frac{٧٥}{٣١٤}$ × $\frac{٣١٤}{٧٥}$ × نق^{٣} = ٠٤و١١٣ × $\frac{٧٥}{٣١٤}$

نق^{٣} = ٢٧ بإيجاد الجذر التكعيبى للطرفين

نق = $\sqrt[٣]{٢٧}$ = ٣ سم

طول القطر = ٣ × ٢ = ٦ سم

(٧)مربع مساحته ٧ سم^{٢} ، أوجد طول ضلعه و طول قطره



مساحة المربع = ل^{٢} = ٧ بإيجاد الجذر التربيعى للطرفين

ل = $\sqrt{٧}$ سم

من فيثاغورث

ص^{٢} = س^{٢} + س^{٢}

ص^{٢} = $(\sqrt{٧})^{٢}$ + $(\sqrt{٧})^{٢}$

ص^{٢} = ٧ + ٧ = ١٤ بإيجاد الجذر التربيعى للطرفين

ص = $\sqrt{١٤}$ سم

---

(٧)دائرة مساحة سطحها ٣ π سم^{٢} ،أوجد محيطها

مساحة الدائرة = π نق^{٢} = ٣ π

بقسمة الطرفين على π

نق^{٢} = ٣ بإيجاد الجذر التربيعى للطرفين

نق = $\sqrt{٣}$ سم

محيط الدائرة = ٢ π نق

محيط الدائرة = ٢ π × $\sqrt{٣}$ = ٢ $\sqrt{٣}$ π سم

مجموعة الأعداد غير النسبية نَ

<u>العدد النسبى</u> هو العدد الذى <u>يمكن</u> وضعه على

الصورة $\frac{أ}{ب}$: أ ∈ ص ، ب ∈ ص ، ب ≠ صفر

أمثلة $\frac{٣}{٤}$ ، - ٢و٠، ١٥ % ، $\sqrt{٩}$ ، $\sqrt[٣]{٨}$

<u>العدد غير النسبى</u> هو العدد الذى <u>لا يمكن</u> وضعه على

الصورة $\frac{أ}{ب}$: أ ∈ ص ، ب ∈ ص ، ب ≠ صفر

أمثلة

<u>أولاً</u> الجذور التربيعية للأعداد الموجبة التى ليست مربعات كاملة

مثل $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{٨}$ ، $\sqrt{١٠}$

<u>ثانياً</u> الجذور التكعيبية للأعداد التى ليست مكعبات كاملة

مثل $\sqrt[٣]{٢}$ ، $\sqrt[٣]{٦}$ ، $\sqrt[٣]{٩}$ ، $\sqrt[٣]{١٠}$

<u>ثالثاً</u> النسبة التقريبية π

<u>ملاحظات هامة</u>

(١) ط ⊂ ص ⊂ ن

(٢) ن ∩ نَ = ∅

(٣) كل عدد غير نسبى تقع قيمته بين عددين نسبيين

تدريبـــات

(١) اثبت أن $\sqrt{٣}$ ينحصر بين ٧و١ ، ٨و١

∵ $(\sqrt{٣})^{٢}$ = ٣

∵ $(١و٧)^{٢}$ = ٨٩و٢

∵ $(١و٨)^{٢}$ = ٢٤و٣

∵ ٨٩و٢ < ٣ < ٢٤و٣

∴ ٧و١ < $\sqrt{٣}$ < ٨و١

∴ العدد $\sqrt{٣}$ ينحصر بين ٧و١ ، ٨و١

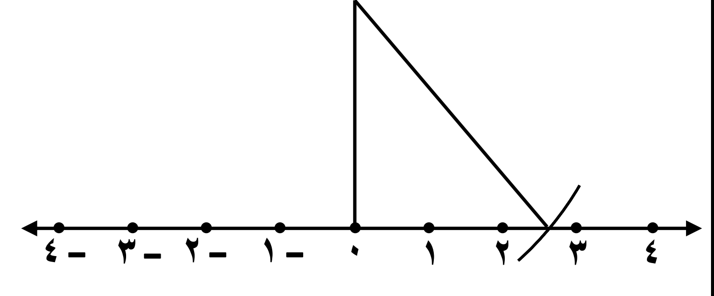
تمثيل الأعداد غير النسبية على خط الأعداد

(١) مثل العدد $\sqrt{٧}$ على خط الأعداد

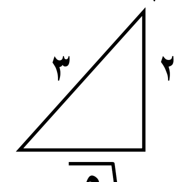
طول الوتر = $\frac{٧+١}{٢}$ = ٤

طول ضلع القائمة = $\frac{٧-١}{٢}$ = ٣

٣ ٤ $\sqrt{٧}$



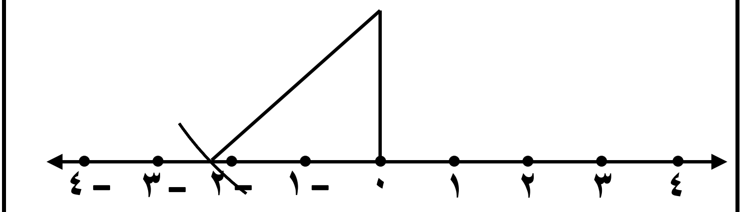
(٢) مثل العدد - $\sqrt{٥}$ على خط الأعداد



طول الوتر = $\frac{٥+١}{٢}$ = ٣

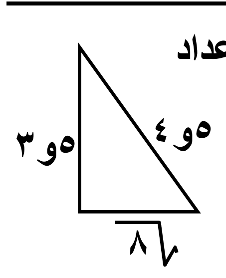
طول ضلع القائمة = $\frac{٥-١}{٢}$ = ٢

$\sqrt{٥}$



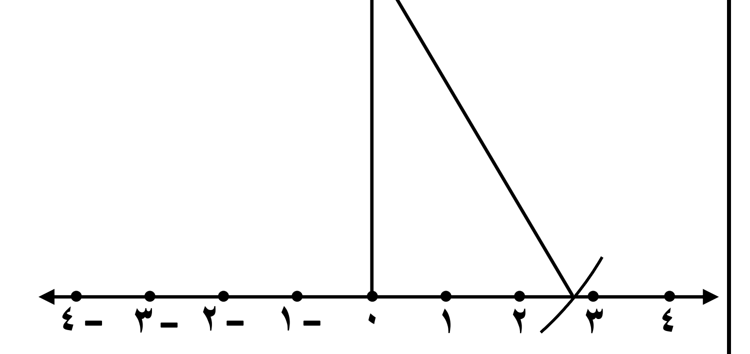
(٣) مثل العدد ٢ $\sqrt{٢}$ على خط الأعداد

٢ $\sqrt{٢}$ = $\sqrt{٨}$

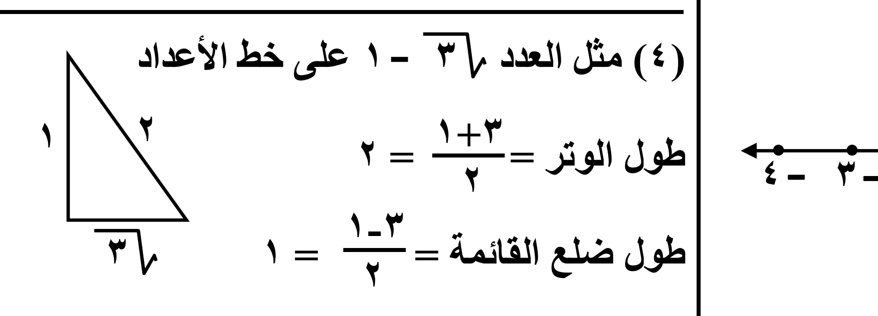


طول الوتر = $\frac{٨+١}{٢}$ = ٥و٤

طول ضلع القائمة = $\frac{٨-١}{٢}$ = ٥و٣

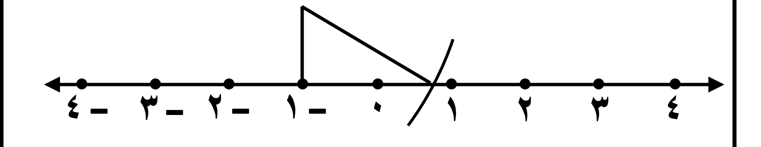


(٤) مثل العدد $\sqrt{٣}$ - ١ على خط الأعداد



طول الوتر = $\frac{٣+١}{٢}$ = ٢

طول ضلع القائمة = $\frac{٣-١}{٢}$ = ١



مجموعة الأعداد الحقيقية ح

(١) ن ∪ نَ = ح

(٢) ن ∩ نَ = ∅

(٣) ط ⊂ ص ⊂ ن ⊂ ح

(٤) ح = ح$_{+}$ ∪ {صفر} ∪ ح$_{-}$

(٥) ح$_{+}$ ∩ ح$_{-}$ = ∅

(٦) ح* = ح$_{+}$ ∪ ح$_{-}$

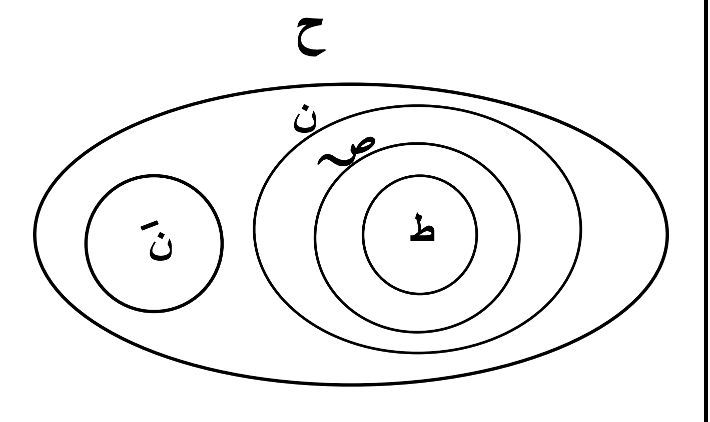
(٧) ح* = ح − {صفر}

(٨) صفر ∉ ح$_{+}$

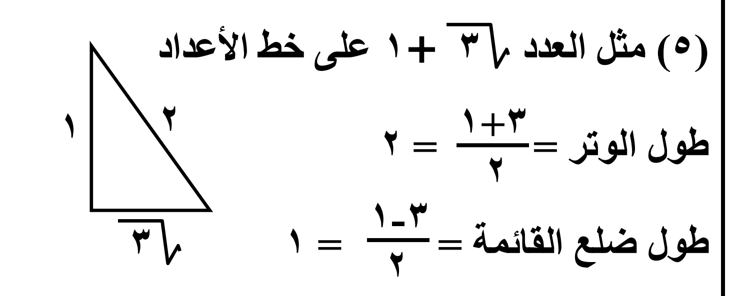
(٩) صفر ∉ ح$_{-}$

(١٠) ح$_{+}$ = {أ : أ ∈ ح ، أ > صفر}

(١١) ح$_{-}$ = {أ : أ ∈ ح ، أ < صفر}

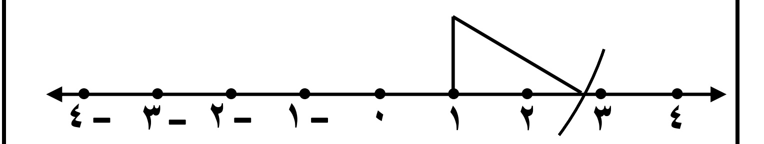


(٥) مثل العدد $\sqrt{٣}$ + ١ على خط الأعداد

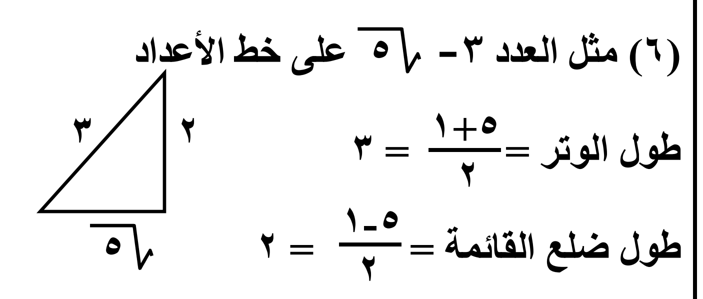


طول الوتر = $\frac{٣+١}{٢}$ = ٢

طول ضلع القائمة = $\frac{٣-١}{٢}$ = ١

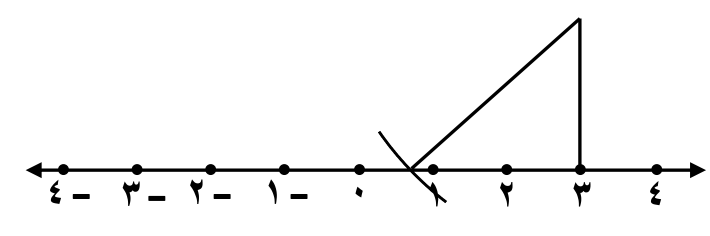


(٦) مثل العدد ٣ - $\sqrt{٥}$ على خط الأعداد

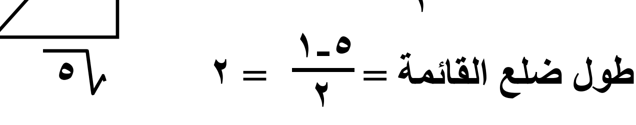


طول الوتر = $\frac{٥+١}{٢}$ = ٣

طول ضلع القائمة = $\frac{٥-١}{٢}$ = ٢

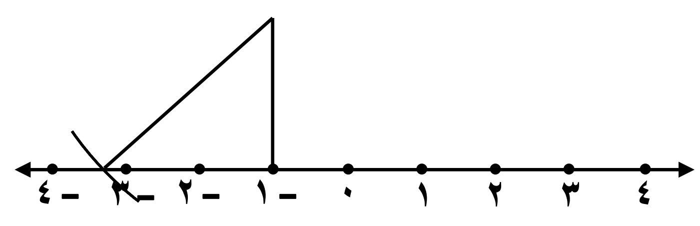


(٧) مثل العدد -١ - $\sqrt{٥}$ على خط الأعداد



طول الوتر = $\frac{٥+١}{٢}$ = ٣

طول ضلع القائمة = $\frac{٥-١}{٢}$ = ٢



الفترات

مثل على خط الأعداد كل مما يأتى

(١) س = { م : م ∈ ص ، ١ < م < ٥ }

-٢ -١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥

س = { ٢ ، ٣ ، ٤ }

****

(٢) س = { م : م ∈ ح ، ١ ≤ م ≤ ٥ }

س = [١ ، ٥]

****

(٣) س = { م : م ∈ ح ، ١ < م < ٥ }

س =] ١ ، ٥ [

****

(٤) س = { م : م ∈ ح ، ١ ≤ م < ٥ }

س = [١ ، ٥ [

****

(٥) س = { م : م ∈ ح ، ١ < م ≤ ٥ }

س =] ١ ، ٥]

****

(٦) س = { م : م ∈ ح ، م > صفر }

س =] صفر ، ∞ [ح+

****

(٧) س = { م : م ∈ ح ، م < صفر }

س =] -∞ ، صفر [ح-

****

(٨) س = { م : م ∈ ح ، م ≥ صفر }

س = [صفر ، ∞ [الحقيقية غير السالبة

****

(٩) س = { م : م ∈ ح ، م ≤ صفر }

س =] -∞ ، صفر] الحقيقية غير الموجبة

العمليات على الفترات

(١) إذا كان س = [١ ، ٥]، ص = [-١ ، ٣]

أوجد س ∩ ص ، س ∪ ص ، س − ص ، ص − س

س ∩ ص = [١ ، ٣]

س ∪ ص = [-١ ، ٥]

س − ص =] ٣ ، ٥]

ص − س = [-١ ، ١ [

****

(١) إذا كان س = [١ ، ٥]، ص =] -∞ ، ٣ [

أوجد س ∩ ص ، س ∪ ص ، س − ص ، ص − س

س ∩ ص = [١ ، ٣ [

س ∪ ص =] -∞ ، ٥]

س − ص = [٣ ، ٥]

ص − س =] -∞ ، ١ [

(٣) إذا كان س = [-١ ، ٥]، ص =] ٠ ، ٣]

أوجد س ∩ ص ، س ∪ ص ، س − ص ، ص − س

س ∩ ص =] ٠ ، ٣]

س ∪ ص = [-١ ، ٥]

س − ص = [-١ ، ٠] ∪] ٣ ، ٥]

ص − س = ∅

****

(٤) إذا كان س =] ٢ ، ٥ [، ص = { ٢ ، ٥ }

أوجد س ∩ ص ، س ∪ ص ، س − ص ، ص − س

س ∩ ص = ∅

س ∪ ص = [٢ ، ٥]

س − ص =] ٢ ، ٥ [

ص − س = { ٢ ، ٥ }

****

العمليات على الأعداد الحقيقية

تدريبات

أكمل ما يأتى

(١) المحايد الجمعى فى ح هو صفر

(٢) المحايد الضربى فى ح هو ١

(٣) $٢\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٥} = ٦\sqrt{٥}$

(٤) $\sqrt{٣} + ٤\sqrt{٣} = ٥\sqrt{٣}$

(٥) $٦ + ٤\sqrt{٥} = ٦ + ٤\sqrt{٥}$

(٦) $٢\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٧} = ٢\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٧}$

(٧) $٧\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٢} - ٦\sqrt{٥}$
$= ٤\sqrt{٢} - ٢\sqrt{٥}$

(٨) $٧\sqrt[٣]{٢} + ٥\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢} + ٢\sqrt[٣]{٢}$
$= ٩\sqrt[٣]{٢} + ٨\sqrt{٢}$

(٩) المعكوس الجمعى للعدد $(\sqrt{٢} - \sqrt{٥})$

$= -(\sqrt{٢} - \sqrt{٥}) = -\sqrt{٢} + \sqrt{٥}$
$= \sqrt{٥} - \sqrt{٢}$

(١٠) $\sqrt{٥} \times \sqrt{٥} = \sqrt{٢٥} = ٥$

(١١) $\sqrt{٥} \times \sqrt{٧} = \sqrt{٣٥}$

(١٢) $-٢\sqrt{٥} \times ٣\sqrt{٢} = -٦\sqrt{١٠}$

(١٣) $٤ \times \sqrt{٧} = ٤\sqrt{٧}$

(١٤) $-٢\sqrt[٣]{٥} \times ٣\sqrt[٣]{٢} = -٦\sqrt[٣]{١٠}$

أكتب ما يأتى بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً

$\frac{٥}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{-٥}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٥}}$ ، $\frac{(\sqrt{٢} - \sqrt{٥})}{\sqrt{٥}}$

(١) $\frac{٥}{\sqrt{٢}} = \frac{٥ \times \sqrt{٢}}{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}} = \frac{٥\sqrt{٢}}{٢}$

(٢) $\frac{-٥}{\sqrt{٣}} = \frac{-٥ \times \sqrt{٣}}{\sqrt{٣} \times \sqrt{٣}} = \frac{-٥\sqrt{٣}}{٣}$

(٣) $\frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٥}} = \frac{\sqrt{٣} \times \sqrt{٥}}{٢\sqrt{٥} \times \sqrt{٥}} = \frac{\sqrt{١٥}}{١٠}$

(٤) $\frac{(\sqrt{٢} - \sqrt{٥})}{\sqrt{٥}} = \frac{(\sqrt{٢} - \sqrt{٥}) \times \sqrt{٥}}{\sqrt{٥} \times \sqrt{٥}}$
$= \frac{(\sqrt{١٠} - ٥)}{٥}$

أكمل ما يأتى

(١) $٣\sqrt{٢}\ (٤\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٥})$

$= ١٢\sqrt{٦} - ٦\sqrt{١٠}$

(٢) $٣\sqrt{٢}\ (٥\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٣})$

$= ٣٠ + ١٢\sqrt{٦}$

(٣) $\sqrt{٧}\ (٣\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٧})$

$= ٣\sqrt{٢١} - ١٤$

(٤) $(\sqrt{٣}-\sqrt{٥})(\sqrt{٢}-\sqrt{٧})$

$=\sqrt{٦}-\sqrt{٢١}-\sqrt{١٠}+\sqrt{٣٥}$

(٥) $(٢\sqrt{٣}-٣\sqrt{٥})(\sqrt{٣}-٢\sqrt{٥})$

$=٦-٤\sqrt{١٥}-٣\sqrt{١٥}+٣٠$

$=٣٦-٧\sqrt{١٥}$

(٦) $(\sqrt{٧}+\sqrt{٢})(\sqrt{٧}-\sqrt{٢})$

$=٧-\sqrt{١٤}+\sqrt{١٤}-٢$

$=٧-٢=٥$

(٧) $(٣\sqrt{٥}+٤\sqrt{٢})(٣\sqrt{٥}-٤\sqrt{٢})$

$=٤٥-١٢\sqrt{١٠}+١٢\sqrt{١٠}-٣٢$

$=٤٥-٣٢=١٣$

(٨) $(\sqrt{٧}-\sqrt{٢})^{٢}$

$=٧-٢\sqrt{١٤}+٢$

$=٩-٢\sqrt{١٤}$

العمليات على الجذور التربيعية

(١) $\sqrt{٨}+\sqrt{٢}$

$=\sqrt{٢\times٤}+\sqrt{٢}=٢\sqrt{٢}+\sqrt{٢}=٣\sqrt{٢}$

(٢) $\sqrt{١٢}-٢\sqrt{٣}$

$=\sqrt{٣\times٤}-٢\sqrt{٣}=٢\sqrt{٣}-٢\sqrt{٣}=$ صفر

(٣) $٣\sqrt{٥٠}-٢\sqrt{١٨}+٣\sqrt{٨}$

$=٣\sqrt{٢\times٢٥}-٢\sqrt{٢\times٩}+٣\sqrt{٢\times٤}$

$=٣\times٥\sqrt{٢}-٢\times٣\sqrt{٢}+٣\times٢\sqrt{٢}$

$=١٥\sqrt{٢}-٦\sqrt{٢}+٦\sqrt{٢}=١٥\sqrt{٢}$

(٤) $٣\sqrt{٢٠}-٤\sqrt{٨٠}+٢\sqrt{٤٥}$

$=٣\sqrt{٤\times٥}-٤\sqrt{٥\times١٦}+٢\sqrt{٥\times٩}$

$=٣\times٢\sqrt{٥}-٤\times٤\sqrt{٥}+٢\times٣\sqrt{٥}$

$=٦\sqrt{٥}-١٦\sqrt{٥}+٦\sqrt{٥}=-٤\sqrt{٥}$

ضع ما يأتى فى أبسط صورة

(١) $\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$

(٢) $\sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

(٣) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$

(٤) $\frac{\sqrt{84}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{84}{7}} = \sqrt{12} = \sqrt{3\times4} = 2\sqrt{3}$

(٥) $6\sqrt{\frac{1}{3}} = 6\sqrt{\frac{1}{3}\times\frac{3}{3}} = 6\sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{6}{3}\sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3}$

(٦) $6\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{6}{3}\sqrt{1\times3} = 2\sqrt{3}$

(٧) $3\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{2\times5} = \frac{3}{5}\sqrt{10}$

(٨) $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{1\times3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

إختصر ما يأتى لأبسط صورة

(١) $(2 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{48}$

$= 4 + 4\sqrt{3} + 3 - \sqrt{3\times16}$

$= 7 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 7$

(٢) $\sqrt{32} - 12\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{6}{\sqrt{2}}$

$= \sqrt{2\times16} - \frac{12}{2}\sqrt{1\times2} + \frac{6\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$= 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + \frac{6\sqrt{2}}{2}$

$= 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \sqrt{2}$

(٣) $2\sqrt{5} + 6\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{12} - 5\sqrt{\frac{1}{5}}$

$= 2\sqrt{5} + \frac{6}{3}\sqrt{1\times3} - \sqrt{3\times4} - \frac{5}{5}\sqrt{1\times5}$

$= 2\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$

العددان المترافقان

إذا كان أ ،ب عددين نسبيين موجبين فإن $(\sqrt{\text{أ}}+\sqrt{\text{ب}})$ ، $(\sqrt{\text{أ}}-\sqrt{\text{ب}})$
يسميان عددان مترافقان و يعتبر كلاً منهما مرافقاً للآخر و يكون حاصل ضربهما
= أ − ب عدد نسبى

تدريبات

(١) أكتب المرافق لكل مما يأتى

(١) $(\sqrt{٥}+\sqrt{٢})$ المرافق $(\sqrt{٥}-\sqrt{٢})$

(٢) $(\sqrt{٧}-\sqrt{٣})$ المرافق $(\sqrt{٧}+\sqrt{٣})$

(٣) $(٤\sqrt{٦}-٥\sqrt{٢})$ المرافق $(٤\sqrt{٦}+٥\sqrt{٢})$

(٤) $(٧+٣\sqrt{٢})$ المرافق $(٧-٣\sqrt{٢})$

(٥) $(\sqrt{٧}-٨)$ المرافق $(\sqrt{٧}+٨)$

(٢) أكتب ما يأتى بحيث يكون المقام عدداً نسبياً

(١) $\frac{٢}{(\sqrt{٧}-\sqrt{٥})}$

$$\frac{٢}{(\sqrt{٧}-\sqrt{٥})} \times \frac{(\sqrt{٧}+\sqrt{٥})}{(\sqrt{٧}+\sqrt{٥})}$$

$$= \frac{٢(\sqrt{٧}+\sqrt{٥})}{٧-٥} \times \frac{٢(\sqrt{٧}+\sqrt{٥})}{٢}$$

$$= (\sqrt{٧}+\sqrt{٥})$$

(٣) إذا كانت س = $\frac{٨}{\sqrt{٥}-\sqrt{٣}}$ ، ص = $\frac{٢-\sqrt{٣}}{٢+\sqrt{٣}}$

أكتب س ، ص بحيث يكون المقام عدداً نسبياً ثم أوجد س + ص

أولاً يجب تبسيط كلاً من س ، ص بضرب كل منهما فى مرافق مقامه

$$س = \frac{٨}{(\sqrt{٥}-\sqrt{٣})} \times \frac{(\sqrt{٥}+\sqrt{٣})}{(\sqrt{٥}+\sqrt{٣})}$$

$$س = \frac{٨(\sqrt{٥}+\sqrt{٣})}{٥-٣} = \frac{٨(\sqrt{٥}+\sqrt{٣})}{٢}$$

$$س = ٤(\sqrt{٥}+\sqrt{٣}) = ٤\sqrt{٥}+٤\sqrt{٣}$$

$$ص = \frac{(٢-\sqrt{٣})}{(٢+\sqrt{٣})} \times \frac{(٢-\sqrt{٣})}{(٢-\sqrt{٣})}$$

$$ص = \frac{٤-٤\sqrt{٣}+٣}{٤-٣} = \frac{٧-٤\sqrt{٣}}{١}$$

$$ص = ٧-٤\sqrt{٣}$$

$$س + ص = ٤\sqrt{٥}+٤\sqrt{٣}+٧-٤\sqrt{٣}$$

$$= ٤\sqrt{٥}+٧$$

(٤) إذا كانت $س = \frac{٤}{(\sqrt{٧} - \sqrt{٣})}$

، $ص = \sqrt{٧} - \sqrt{٣}$ **اثبت أن س ، ص مترافقان ثم أوجد قيمة**

$س^٢ - ٢ س ص + ص^٢$

$س = \frac{٤}{(\sqrt{٧} - \sqrt{٣})} \times \frac{(\sqrt{٧} + \sqrt{٣})}{(\sqrt{٧} + \sqrt{٣})}$

$س = \frac{٤(\sqrt{٧} + \sqrt{٣})}{٧ - ٣} = \frac{٤(\sqrt{٧} + \sqrt{٣})}{٤}$

$س = (\sqrt{٧} + \sqrt{٣})$ ، ∵ $ص = (\sqrt{٧} - \sqrt{٣})$

∴ **س ، ص مترافقان**

$س^٢ = (\sqrt{٧} + \sqrt{٣})^٢$

$= ٧ + ٢\sqrt{٢١} + ٣ = ١٠ + ٢\sqrt{٢١}$

$ص^٢ = (\sqrt{٧} - \sqrt{٣})^٢$

$= ٧ - ٢\sqrt{٢١} + ٣ = ١٠ - ٢\sqrt{٢١}$

$س ص = (\sqrt{٧} + \sqrt{٣})(\sqrt{٧} - \sqrt{٣})$

$= ٧ - ٣ = ٤$

$س^٢ - ٢ س ص + ص^٢$

$= ١٠ + ٢\sqrt{٢١} - ٢ \times ٤ + ١٠ - ٢\sqrt{٢١}$

$= ٢٠ - ٨ = ١٢$

(٥) إذا كانت $س = \sqrt{٧} + \sqrt{٥}$ ، $ص = \frac{٢}{س}$

أوجد قيمة $\frac{س + ص}{س ص}$

$ص = \frac{٢}{س} = \frac{٢}{(\sqrt{٧} + \sqrt{٥})}$

$ص = \frac{٢}{(\sqrt{٧} + \sqrt{٥})} \times \frac{(\sqrt{٧} - \sqrt{٥})}{(\sqrt{٧} - \sqrt{٥})}$

$ص = \frac{٢(\sqrt{٧} - \sqrt{٥})}{٧ - ٥} \times \frac{٢(\sqrt{٧} - \sqrt{٥})}{٢}$

$ص = (\sqrt{٧} - \sqrt{٥})$

$س + ص = \sqrt{٧} + \sqrt{٥} + \sqrt{٧} - \sqrt{٥} = ٢\sqrt{٧}$

$س ص = (\sqrt{٧} + \sqrt{٥})(\sqrt{٧} - \sqrt{٥})$

$= ٧ - ٥ = ٢$

$\frac{س + ص}{س ص} = \frac{٢\sqrt{٧}}{٢} = \sqrt{٧}$

العمليات على الجذور التكعيبية

تدريبات

إختصر ما يأتى لأبسط صورة

(١) $\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[٣]{٥} = \sqrt[٣]{١٠}$

(٢) $\sqrt[٣]{٣} \times \sqrt[٣]{-٤} = -\sqrt[٣]{١٢}$

(٣) $\sqrt[٣]{٤٠} = \sqrt[٣]{٥ \times ٨} = ٢\sqrt[٣]{٥}$

(٤) $\sqrt[٣]{-٥٤} = -\sqrt[٣]{٢ \times ٢٧} = -٣\sqrt[٣]{٢}$

(٥) $\sqrt[٣]{١٦} - ٢\sqrt[٣]{٢٥٠} - ٥\sqrt[٣]{-٥٤}$

$= \sqrt[٣]{٢ \times ٨} - ٢\sqrt[٣]{٢ \times ١٢٥} + ٥\sqrt[٣]{٢ \times ٢٧}$

$= ٢\sqrt[٣]{٢} - ٢ \times ٥\sqrt[٣]{٢} + ٥ \times ٣\sqrt[٣]{٢}$

$= ٢\sqrt[٣]{٢} - ١٠\sqrt[٣]{٢} + ١٥\sqrt[٣]{٢}$

$= ٧\sqrt[٣]{٢}$

(٦) $\sqrt[٣]{٥٤} + ٥\sqrt[٣]{١٦} + ٨\sqrt[٣]{\frac{-١}{٤}}$

$= \sqrt[٣]{٢ \times ٢٧} + ٥\sqrt[٣]{٢ \times ٨} - ٨\sqrt[٣]{\frac{١ \times ٤ \times ٤}{٤ \times ٤ \times ٤}}$

$= ٣\sqrt[٣]{٢} + ٥ \times ٢\sqrt[٣]{٢} - ٨\sqrt[٣]{\frac{١٦}{٦٤}}$

$= ٣\sqrt[٣]{٢} + ١٠\sqrt[٣]{٢} - \frac{٨}{٤}\sqrt[٣]{١٦}$

$= ١٣\sqrt[٣]{٢} - ٢\sqrt[٣]{٢ \times ٨}$

$= ١٣\sqrt[٣]{٢} - ٢ \times ٢\sqrt[٣]{٢}$

$= ١٣\sqrt[٣]{٢} - ٤\sqrt[٣]{٢} = ٩\sqrt[٣]{٢}$

(٧) إذا كانت س $= \sqrt[٣]{٣} + ١$ ، ص $= \sqrt[٣]{٣} - ١$

أوجد $(\text{س} + \text{ص})^٣$ ، $(\text{س} - \text{ص})^٣$

$(\text{س} + \text{ص})^٣ = (\sqrt[٣]{٣} + ١ + \sqrt[٣]{٣} - ١)^٣$

$= (٢\sqrt[٣]{٣})^٣ = ٢٤$

$(\text{س} - \text{ص})^٣ = (\sqrt[٣]{٣} + ١ - (\sqrt[٣]{٣} - ١))^٣$

$(\text{س} - \text{ص})^٣ = (\sqrt[٣]{٣} + ١ - \sqrt[٣]{٣} + ١)^٣$

$= (٢)^٣ = ٨$

تطبيقات على الأعداد الحقيقية

أولاً المكعب إذا كان مكعب طول حرفه ل فإن

(١)مساحة الوجه (على شكل مربع) =
طول الضلع × نفسه = ل × ل = $ل^٢$

(٢)المساحة الجانبية للمكعب =
مساحة الوجه × ٤ = ٤ × ل٢ = ٤ $ل^٢$

(٣)المساحة الكلية للمكعب =
مساحة الوجه × ٦ = ٦ × ل٢ = ٦ $ل^٢$

(٤)حجم المكعب = طول الحرف × نفسه × نفسه
= ل × ل × ل = $ل^٣$

ثانياً (١)حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}\pi نق^٣$
(٢)مساحة سطح الكره = ٤ $\pi نق^٢$

ثالثاً مساحة الدائرة = $\pi نق^٢$
محيط الدائرة = ٢ π نق

رابعاً
(١) حجم متوازى المستطيلات
= الطول × العرض × الإرتفاع

(٢) حجم متوازى المستطيلات
= مساحة القاعدة × الإرتفاع

(٣) المساحة الجانبية لمتوازى المستطيلات
= محيط القاعدة × الإرتفاع

(٤) المساحة الكلية لمتوازى المستطيلات
= المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين
= ٢(س ص + س ع + ص ع)

رابعاً
(١) حجم الإسطوانة
= مساحة القاعدة × الإرتفاع
= $\pi نق^٢$ × ع

(٣) المساحة الجانبية للإسطوانة
= محيط القاعدة × الإرتفاع
= ٢ π نق × ع

(٤) المساحة الكلية للإسطوانة
= المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين
= ٢ π نق ع + ٢ $\pi نق^٢$

تدريبات

(١) دائرة مساحتها ٣٨و٥ $سم^٢$ أوجد محيطها

$\pi = \frac{٢٢}{٧}$

مساحة الدائرة = $\pi نق^٢$ = ٣٨و٥

$\frac{٢٢}{٧} \times نق^٢$ = ٣٨و٥ بضرب الطرفين فى $\frac{٧}{٢٢}$

$\frac{٧}{٢٢} \times \frac{٢٢}{٧} \times نق^٢$ = ٣٨و٥ × $\frac{٧}{٢٢}$

$نق^٢$ = ١٢و٢٥ بايجاد الجذر التربيعى للطرفين

نق = $\sqrt{١٢و٢٥}$ = ٣و٥ سم

محيط الدائرة =٢ π نق = ٢× $\frac{٢٢}{٧}$ ×٣و٥ =٢٢ سم

---

(٢)أوجد المساحة الكلية لمكعب حجمه ١٢٥ سم^3

حجم المكعب = ل^3 = ١٢٥ بإيجاد الجذر التكعيبى للطرفين

ل = $\sqrt[3]{١٢٥}$ = ٥ سم

المساحة الكلية للمكعب =

٦ ل^2 = ٦ × ٥ × ٥ = ١٥٠ سم^2

---

(٣)أوجد طول حرف مكعب حجمه ٢ $\sqrt{٢}$ سم^3

حجم المكعب = ل^3 = ٢ $\sqrt{٢}$

ل^3 = $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٢}$

ل = $\sqrt{٢}$ سم

---

(٤) أوجد حجم مكعب مساحته الكلية ٢٩٤ سم^2

المساحة الكلية للمكعب = ٦ ل^2 = ٢٩٤

ل^2 = ٢٩٤ ÷ ٦

ل^2 = ٤٩

ل = $\sqrt{٤٩}$ ل = ٧ سم

حجم المكعب = ل^3 = ٧ ^{3} = ٣٤٣ سم^3

---

(٥) أوجد حجم متوازى مستطيلات أبعاده $\sqrt{٢}$ سم ، $\sqrt{٣}$ سم ، $\sqrt{٦}$ سم

حجم متوازى المستطيلات

= الطول × العرض × الإرتفاع

= $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٣}$ × $\sqrt{٦}$ = ٦ سم^3

---

(٦) متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل حجمه ٧٢٠ سم^3 و ارتفاعه ٥ سم أوجد مساحته الكلية

حجم متوازى المستطيلات

= مساحة القاعدة × الإرتفاع = ٧٢٠

مساحة القاعدة × ٥ = ٧٢٠

مساحة القاعدة = ٧٢٠ ÷ ٥ = ١٤٤ سم^2

مساحة القاعدة (مربع) = ل^2 = ١٤٤

ل = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم

المساحة الكلية لمتوازى المستطيلات

= ٢(س ص + س ع + ص ع)

= ٢(١٢ × ١٢ + ١٢ × ٥ + ١٢ × ٥)

= ٥٢٨ سم^2

---

(٧) إسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرقاعدتها ١٤سم و ارتفاعها ٢٠ سم أوجد حجمها و مساحتها الكلية

حجم الإسطوانة = مساحة القاعدة × الإرتفاع

= π نق^2 × ع = $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ × ١٤ × ٢٠

= ١٢٣٢٠ سم^3

المساحة الجانبية للإسطوانة

= محيط القاعدة × الارتفاع

= ٢ π نق × ع

= ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ × ٢٠ = ١٧٦٠ سم^2

المساحة الكلية للإسطوانة

= المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين

= ٢ π نق ع + ٢ π نق^2

= ١٧٦٠ + ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ × ١٤

= ١٧٦٠ + ١٢٣٢ = ٢٩٩٢ سم^2

---

(٨) المساحة الجانبية لاسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ل و ارتفاعها ع =

نق = $\frac{ل}{٢}$

المساحة الجانبية للإسطوانة
= محيط القاعدة × الارتفاع = ٢ π نق × ع
= ٢ × π × $\frac{ل}{٢}$ × ع = π ل ع

---

(٩) إذا كان ارتفاع اسطوانة دائرية قائمة يساوى طول نصف قطر قاعدتها أوجد ارتفاع الأسطوانة علماً بأن حجم الأسطوانة ٧٢ π سم^{٣}

حجم الإسطوانة = مساحة القاعدة × الإرتفاع
= π نق^{٢} × ع = ٧٢ π بقسمة الطرفين على π
نق^{٢} × نق = ٧٢
نق^{٣} = ٧٢

نق = $\sqrt[٣]{٧٢}$ = $\sqrt[٣]{٨ \times ٩}$ = ٢ $\sqrt[٣]{٩}$ سم

---

(١٠) أوجد الحجم و مساحة سطح لكرة طول قطرها ٢و٤ سم

نق = ٢و٤ ÷ ٢ = ١و٢ سم

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}
= $\frac{٤}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١و٢ × ١و٢ × ١و٢
= ٣٨و٨٠٨ سم^{٣}

مساحة سطح الكره = ٤ π نق^{٢}
= ٤ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١و٢ × ١و٢ = ٥٥و٤٤ سم^{٢}

(١١) كرة حجمها ٥و٥٦٢ π سم^{٣} أوجد مساحة سطحها بدلالة π

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} = ٥و٥٦٢ π
بقسمة الطرفين على π

$\frac{٤}{٣}$ نق^{٣} = ٥و٥٦٢ بضرب الطرفين فى $\frac{٣}{٤}$

$\frac{٣}{٤}$ × $\frac{٤}{٣}$ نق^{٣} = ٥و٥٦٢ × $\frac{٣}{٤}$

نق^{٣} = ٤٢١و٨٧٥ بإيجاد الجذر التكعيبى للطرفين

نق = $\sqrt[٣]{٤٢١و٨٧٥}$ = ٥و٧ سم

مساحة سطح الكره = ٤ π نق^{٢}
= ٤ × π × ٥و٧ × ٥و٧ = ٢٢٥ π سم^{٢}

---

(١٢) أوجد طول نصف قطر كرة حجمها $\frac{٩}{٢}$ π سم^{٣}

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} = $\frac{٩}{٢}$ π
بقسمة الطرفين على π

$\frac{٤}{٣}$ نق^{٣} = $\frac{٩}{٢}$ بضرب الطرفين فى $\frac{٣}{٤}$

$\frac{٣}{٤}$ × $\frac{٤}{٣}$ نق^{٣} = $\frac{٩}{٢}$ × $\frac{٣}{٤}$

نق^{٣} = $\frac{٢٧}{٨}$ بإيجاد الجذر التكعيبى للطرفين

نق = $\sqrt[٣]{\frac{٢٧}{٨}}$ = $\frac{٣}{٢}$ سم

حل المعادلات و المتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى ح و مثل الحل على خط الأعداد

(١) س^{٣} - ٢ = ٦ بإضافة +٢ للطرفين

س^{٣} - ٢ + ٢ = ٦ + ٢

س^{٣} = ٨ بإيجاد الجذر التكعيبى للطرفين

س = $\sqrt[٣]{٨}$ = ٢ م.ح فى ح = { ٢ }

-٤ -٣ -٢ -١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤

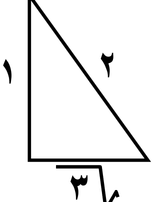
---

(٢) س + ١ = $\sqrt{٣}$ بإضافة - ١ للطرفين

س + ١ - ١ = $\sqrt{٣}$ - ١

س = $\sqrt{٣}$ - ١

م.ح فى ح = { $\sqrt{٣}$ - ١ }



طول الوتر = $\frac{٣+١}{٢}$ = ٢

طول ضلع القائمة = $\frac{٣-١}{٢}$ = ١

-٤ -٣ -٢ -١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤

أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية فى ح و مثل الحل على خط الأعداد

(١) س – ١ ≤ ٥ حيث س ∈ ط

س – ١ ≤ ٥ بإضافة +١ للطرفين

س – ١ +١ ≤ ٥+١

س ≤ ٦

م.ح فى ح =] -∞ ، ٦]

-∞ ∞ ٦

---

(٢) ٢س +٣ < ٧ حيث س ∈ ص

٢س +٣ < ٧ بإضافة – ٣ للطرفين

٢س +٣ – ٣ < ٧ – ٣

٢س < ٤

$\frac{٢س}{٢}$ < $\frac{٤}{٢}$

س < ٢

م.ح فى ح =] -∞ ، ٢ [

-∞ ∞ ٢

---

(٣) ٢س – ٥ ≥ ٥ حيث س ∈ ن

٢س – ٥ ≥ ٥ بإضافة +٥ للطرفين

٢س – ٥ +٥ ≥ ٥ +٥

٢س ≥ ١٠ بقسمة الطرفين على ٢

$\frac{٢س}{٢}$ ≥ $\frac{١٠}{٢}$

س ≥ ٥ س = [٥ ، ∞ [

-∞ ∞ ٥

(٤) ٧ - ٥س ⩽ ٢ حيث س ∋ ن

٧ - ٥س ⩽ ٢ بإضافة - ٧ للطرفين

٧ - ٥س - ٧ ⩽ ٢ - ٧

- ٥س ⩽ - ٥ بقسمة الطرفين على - ٥

$\frac{-٥س}{-٥} \geqslant \frac{-٥}{-٥}$

س ⩾ ١

س~ = [١ ، ∞ [

∞- ∞

١

(٥) ٥ > ٣س - ١ ⩾ ١١ حيث س ∋ ن

٥ > ٣س - ١ ⩾ ١١

بإضافة +١ لجميع الأطراف

٥+١ > ٣س - ١ + ١ ⩾ ١١+١

٦ > ٣س ⩾ ١٢ بالقسمة على ٣

$\frac{٦}{٣} > \frac{٣س}{٣} \geqslant \frac{١٢}{٣}$

٢ > س ⩾ ٤

∞- ∞

٢ ٤

س~ =] ٢ ، ٤]

العلاقة بين متغيرين

م س + ب ص = جـ حيث م ≠ صفر ، ب ≠ صفر

تسمى علاقة خطية بين المتغيرين س ، ص

(١) إذا كان الزوج المرتب (٢ ، ٦) يحقق العلاقة ص = ب س احسب قيمة ب

∵ ص = ب س

∴ ٦ = ب × ٢ بقسمة الطرفين على ٢

$\frac{٦}{٢} = \frac{٢ ب}{٢}$ ∴ ب = ٣

(٢) إذا كان الزوج المرتب (١ ، ٢) يحقق العلاقة ص = س + م احسب قيمة م

∵ ص = س + م

∴ ٢ = ١ + م

∴ م = ٢ - ١ ∴ م = ١

(٣) إذا كان الزوج المرتب (٣ ، - ٤) يحقق العلاقة ص + ٢ س = ب احسب قيمة ب

∵ ص + ٢ س = ب

∴ - ٤ + ٢ × ٣ = ب

∴ - ٤ + ٦ = ب ∴ ب = ٢

(٤) إذا كان الزوج المرتب (جـ ، ٤) يحقق العلاقة ٣ س - ٢ ص = ١٠ احسب قيمة جـ

∵ ٣ س - ٢ ص = ١٠

∴ ٣ × جـ - ٢ × ٤ = ١٠

∴ ٣جـ - ٨ = ١٠

∴ ٣جـ = ١٠ + ٨

∴ ٣جـ = ١٨ ÷ ٣

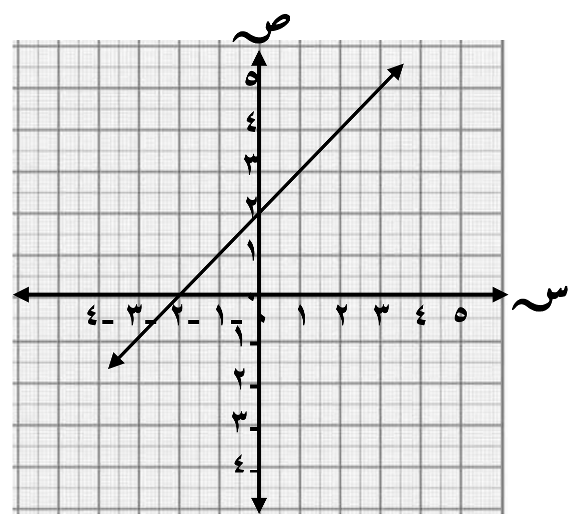
∴ جـ = ٦

(٥) أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقة ص = س + ٢ و مثلها بيانياً

بفرض س = ٠
ص = (٠) + ٢ = ٢ (٠ ، ٢)

بفرض س = ١
ص = (١) + ٢ = ٣ (١ ، ٣)

بفرض س = ٢
ص = (٢) + ٢ = ٤ (٢ ، ٤)

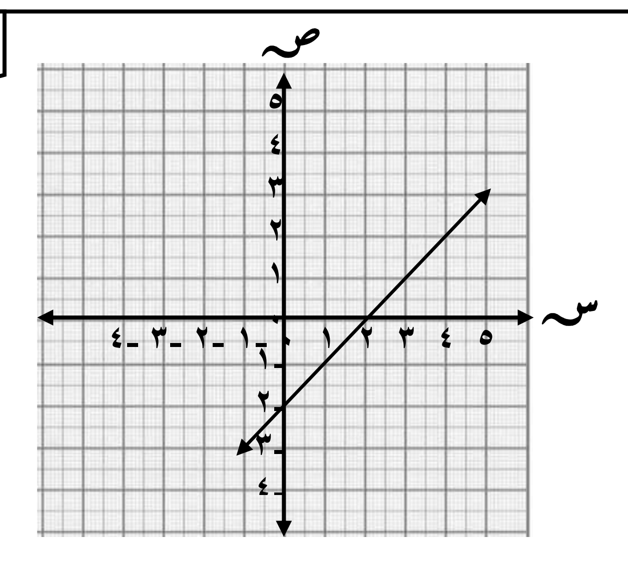


(٦) أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقة س = ص + ٢ و مثلها بيانياً

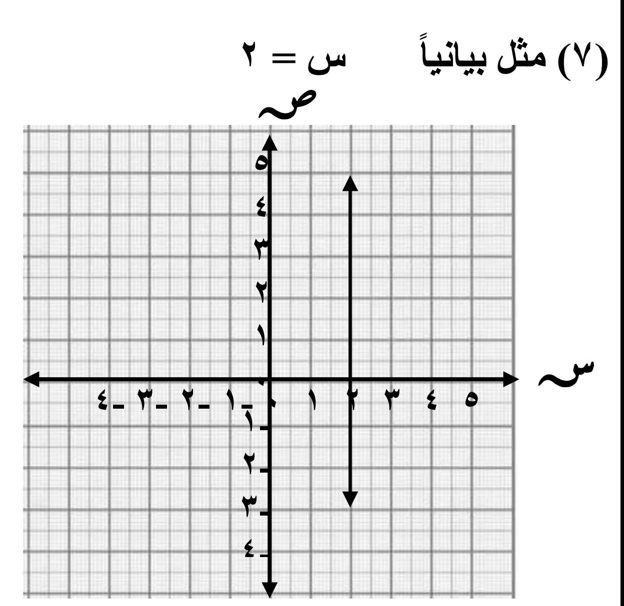
بفرض ص = ٠
س = (٠) + ٢ = ٢ (٢ ، ٠)

بفرض ص = ١
س = (١) + ٢ = ٣ (٣ ، ١)

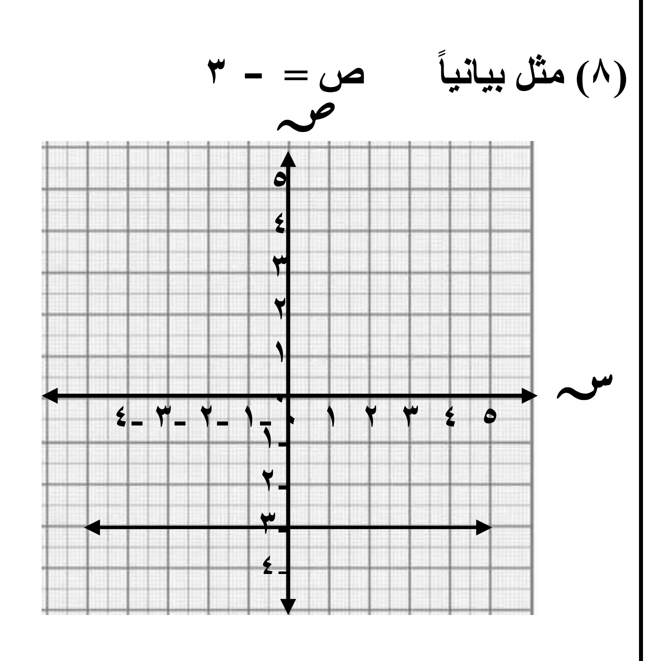
بفرض ص = ٢
س = (٢) + ٢ = ٤ (٤ ، ٢)



(٧) مثل بيانياً س = ٢



(٨) مثل بيانياً ص = - ٣



(٩) أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقة س +٢ ص = ٤ و مثلها بيانياً

(عزل)

س + ٢ص = ٤
س = ٤ ـ ٢ص

بفرض ص = ٠

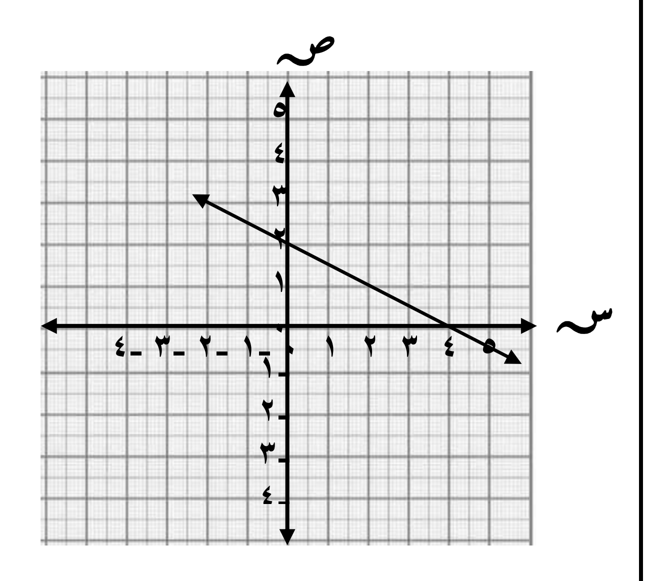
س = ٤ ـ ٢× (٠) = ٤ (٤ ، ٠)

بفرض ص = ١

س = ٤ ـ ٢× (١) = ٢ (٢ ، ١)

بفرض ص = ٢

س = ٤ ـ ٢× (٢) = ٠ (٠ ، ٢)



(١٠) أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقة ٢س - ص = ١ و مثلها بيانياً

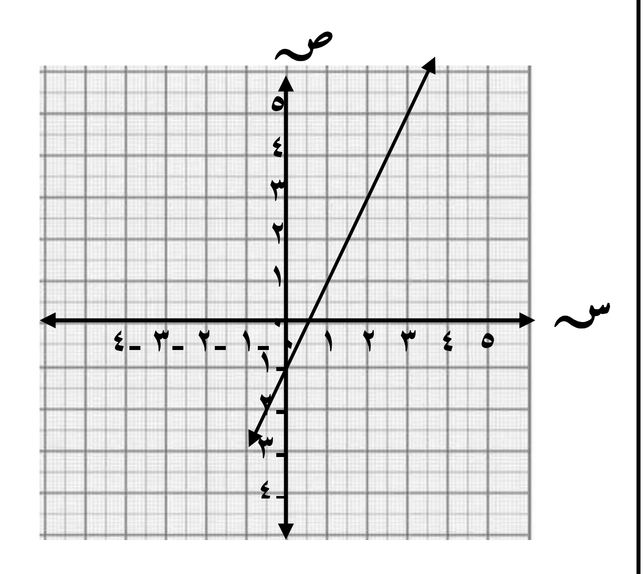
(عزل)

٢ س - ص = ١
- ص = ١ ـ ٢ س ÷ - ١
ص = - ١ + ٢س

بفرض س = صفر
ص = - ١ + ٢ × (٠) = - ١ (٠ ، - ١)

بفرض س = ١
ص = - ١ + ٢ × (١) = ١ (١ ، ١)

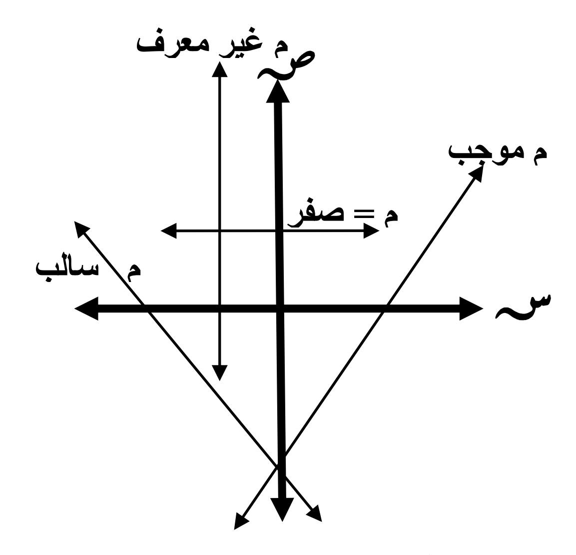
بفرض س = ٢
ص = - ١ + ٢ × (٢) = ٣ (٢ ، ٣)



ميل الخط المستقيم

ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين
($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$)

$$= \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$



ملاحظات هامة

(١) ميل محور السينات يساوى صفر

(٢) ميل أى مستقيم أفقى يوازى السينات يساوى صفر

(٣) ميل محور الصادات غير معرف

(٤) ميل أى مستقيم رأسى يوازى الصادات غير معرف

(٥) إذا كان المستقيم يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن الميل كمية موجبة

(٦) إذا كان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن الميل كمية سالبة

(١١) أوجد نقط تقاطع المستقيم الممثل للمعادلة ٣ س + ٢ص = ١٢ مع محورى الإحداثيات

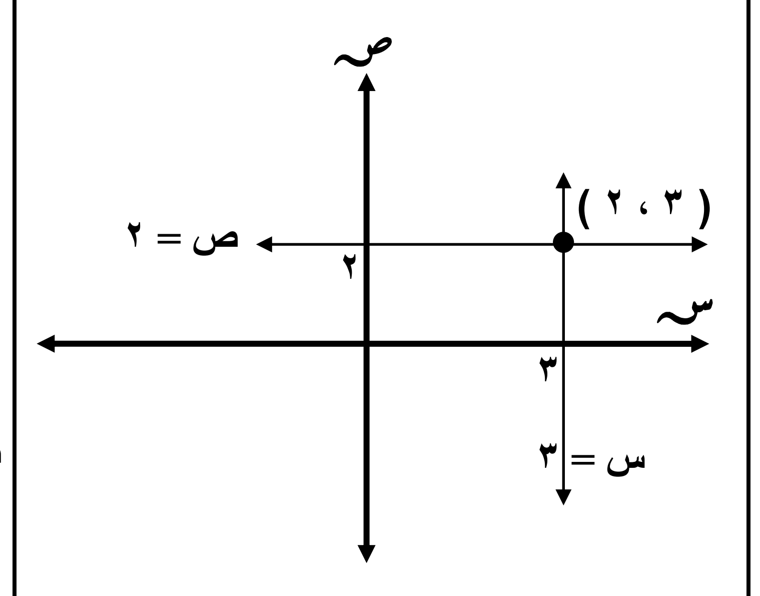
أولاً
المستقيم يقطع محور السينات عند ص = صفر

٣ س + ٢ص = ١٢
٣ س +٢ × (صفر) = ١٢
٣ س = ١٢ ÷ ٣
س = ٤
نقطة التقاطع مع محور السينات (٤ ، ٠)

ثانياً
المستقيم يقطع محور الصادات عند س = صفر

٣ س + ٢ص = ١٢
٣ × (صفر) + ٢ ص = ١٢
٢ ص = ١٢ ÷ ٢
ص = ٦
نقطة التقاطع مع محور الصادات (٠ ، ٦)

(١٢) نقطة تقاطع المستقيمين الممثلين للمعادلتين س = ٣ ، ص = ٢ هى ....



تدريبات

(١) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ١) ، (٣ ، ٤)

$$\text{الميل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٤ - ١}{٣ - ٢} = \frac{٣}{١} = ٣$$

---

(٢) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (- ٤ ، - ١) ، (٣ ، ٥)

$$\text{الميل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - (-١)}{٣ - (-٤)} = \frac{٥ + ١}{٣ + ٤} = \frac{٦}{٧}$$

---

(٣) اثبت أن النقاط أ(١ ، ١)، ب(٢ ، ٣) ، جـ (٣ ، ٥) تقع على استقامة واحدة

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ١}{٢ - ١} = \frac{٢}{١} = ٢$$

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{ب جـ} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ٣}{٣ - ٢} = \frac{٢}{١} = ٢$$

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$

∴ أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة

---

(٤) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين س (م ، ٥)، ص(٢ ، ٣) ميله = $\frac{٢}{٧}$ أوجد قيمة م

$$\text{الميل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ٥}{٢ - م} = \frac{-٢}{٢ - م} = \frac{٢}{٧}$$

٤ - ٢م = - ١٤ بإضافة - ٤ للطرفين

٤ - ٢م - ٤ = - ١٤ - ٤

- ٢م = - ١٨ بالقسمة على - ٢

م = ٩

---

(٥) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين س(٣ ، ٧)، ص(٥ ، ك) يوازى محور السينات احسب قيمة ك

∵ المستقيم يوازى محور السينات

∴ الميل = صفر

$$\text{الميل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ك - ٧}{٥ - ٣} = \frac{ك - ٧}{٢} = \frac{٠}{٢}$$

ك - ٧ = صفر   ك = ٧

---

(٦) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين س(٥ ، ١)، ص(ك ، ٩) يوازى محور الصادات احسب قيمة ك

∵ المستقيم يوازى محور الصادات

∴ الميل غير معرف

$$\text{الميل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٩ - ١}{ك - ٥} = \frac{٨}{ك - ٥} = \frac{٨}{٠}$$

ك - ٥ = صفر   ك = ٥

(٧) إذا كانت النقاط
ﻫ(١ ، ك)، ب(– ١ ، ٥) ، ج (٢ ، – ٣)
تقع على استقامة واحدة احسب قيمة ك

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ب ج}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{-٣ - ٥}{٢ - (-١)} = \frac{-٨}{٣}$$

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{ﻫ ب}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{٥ - \text{ك}}{-١ - ١} = \frac{٥ - \text{ك}}{-٢}$$

∵ ﻫ ،ب ، ج تقع على استقامة واحدة

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{ﻫ ب}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{ب ج}}$

$$\frac{٥ - \text{ك}}{-٢} = \frac{-٨}{٣}$$

١٥–٣ك = ١٦ بإضافة – ١٥ للطرفين

١٥–٣ك – ١٥ = ١٦ – ١٥

–٣ك = ١ بالقسمة على –٣

$$\text{ك} = \frac{-١}{٣}$$

الإحصاء

$$\text{الوسط الحسابى} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$$

(١) أوجد الوسط الحسابى لمجموعة القيم
١٠ ، ٥ ، ٣ ، ٢

$$\text{الوسط الحسابى} = \frac{١٠ + ٥ + ٣ + ٢}{٤} = ٥$$

(٢) أوجد الوسط الحسابى لمجموعة القيم
٥+ﻫ ، ٨ ، ٦ ، ٢، ٩ – ﻫ

الوسط الحسابى

$$= \frac{٥ + \text{ﻫ} + ٨ + ٦ + ٢ + ٩ - \text{ﻫ}}{٥}$$

$$= \frac{٣٠}{٥} = ٦$$

(٣) إذا كان الوسط الحسابى لمجموعة القيم
٨ ، ٦ ، ٩ ، ك = ٧

مجموع القيم = الوسط الحسابى × عدد القيم

مجموع القيم = ٧ × ٤ = ٢٨

ك = ٢٨ – (٨ + ٦ + ٩) = ٥

المنوال

لمجموعة من البيانات هو القيمة الأكثر شيوعاً (تكراراً) فى المجموعة

(١) أوجد المنوال لمجموعة القيم

٧ ، ٥ ، ٣ ، ٥ ، ٢

المنوال = ٥

(٢) أوجد المنوال لمجموعة القيم

٩ ، ٧ ، ٤ ، ٤ ، ٧ ، ٢، ٧

المنوال = ٧

(٣) إذا كان المنوال لمجموعة القيم

٩ ، ٧ ، ٤ ، ٩ ، ٧ ، ٢، ك + ٣ هو ٩

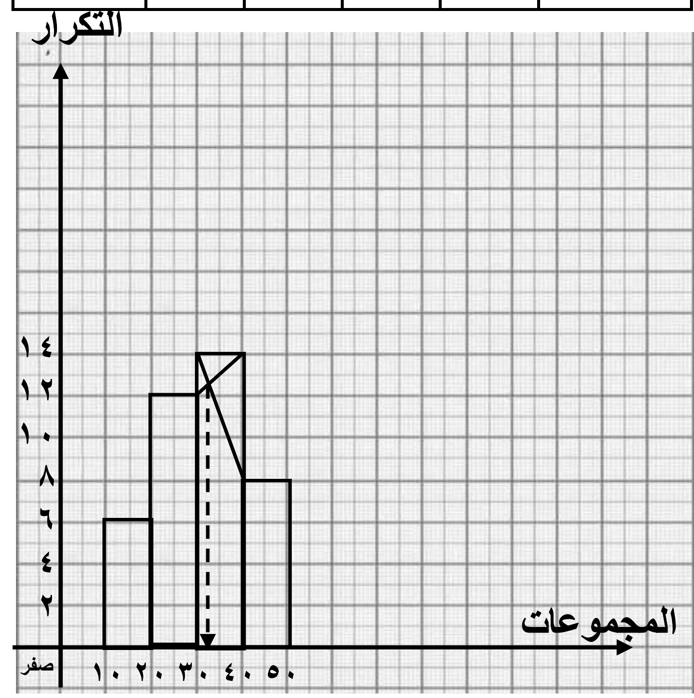
ك + ٣ = ٩

ك = ٩ - ٣

ك = ٦

(٤) أوجد المنوال للتوزيع التكرارى

المجموعة	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	المجموع
التكرار	٦	١٢	١٤	٨	٤٠



المنوال ≃ ٣٢

(٤) أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى

المجموعات	٥ –	١٥ –	٢٥ –	٣٥ –	٤٥ –	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٤	٢	٢٠

المجموعة	م (مركز المجموعة)	ك (التكرار)	م × ك
٥ –	١٠	٣	٣٠
١٥ –	٢٠	٤	٨٠
٢٥ –	٣٠	٧	٢١٠
٣٥ –	٤٠	٤	١٦٠
٤٥ –	٥٠	٢	١٠٠
المجموع		٢٠	٥٨٠

الوسط الحسابى = $\frac{\text{مج (م × ك)}}{\text{مج ك}} = \frac{٥٨٠}{٢٠} = ٢٩$

(٥) أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى

المجموعات	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –	المجموع
التكرار	١٠	٢٠	٢٥	٣٠	١٥	١٠٠

المجموعة	م (مركز المجموعة)	ك (التكرار)	م × ك
١٠ –	١٥	١٠	١٥٠
٢٠ –	٢٥	٢٠	٥٠٠
٣٠ –	٣٥	٢٥	٨٧٥
٤٠ –	٤٥	٣٠	١٣٥٠
٥٠ –	٥٥	١٥	٨٢٥
المجموع		١٠٠	٣٧٠٠

الوسط الحسابى = $\frac{\text{مج (م × ك)}}{\text{مج ك}} = \frac{٣٧٠٠}{١٠٠} = ٣٧$

الوسيط

لمجموعة من البيانات هو القيمة التى تقع فى وسط المجموعة تماماً عند ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً

إذا كان عدد القيم فردياً فإن

ترتيب الوسيط = $\frac{ن + ١}{٢}$

إذا كان عدد القيم زوجياً فإن

ترتيب الوسيط = $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن + ٢}{٢}$

(١) أوجد الوسيط لمجموعة القيم

١٠ ، ٥ ، ٨ ، ٢ ، ٦

الترتيب ٢ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ١٠

ترتيب الوسيط = الثالث

الوسيط = ٦

(٢) أوجد الوسيط لمجموعة القيم

١١ ، ٦ ، ٤ ، ٥ ، ٨ ، ٩

الترتيب ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ٩ ، ١١

ترتيب الوسيط = الثالث ، الرابع

الوسيط = $\frac{٦ + ٨}{٢}$ = ٧

(٣) إذا كان ترتيب الوسيط لمجموعة القيم هو السابع فإن عدد هذه القيم = ٢×٧ − ١ = ١٣

(٤) إذا كان ترتيب الوسيط لمجموعة القيم هو الخامس و السادس فإن عدد هذه القيم =

٢×٥ = ١٠

(٥) كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد و الجدول التكرارى المتجمع النازل ثم أوجد الوسيط

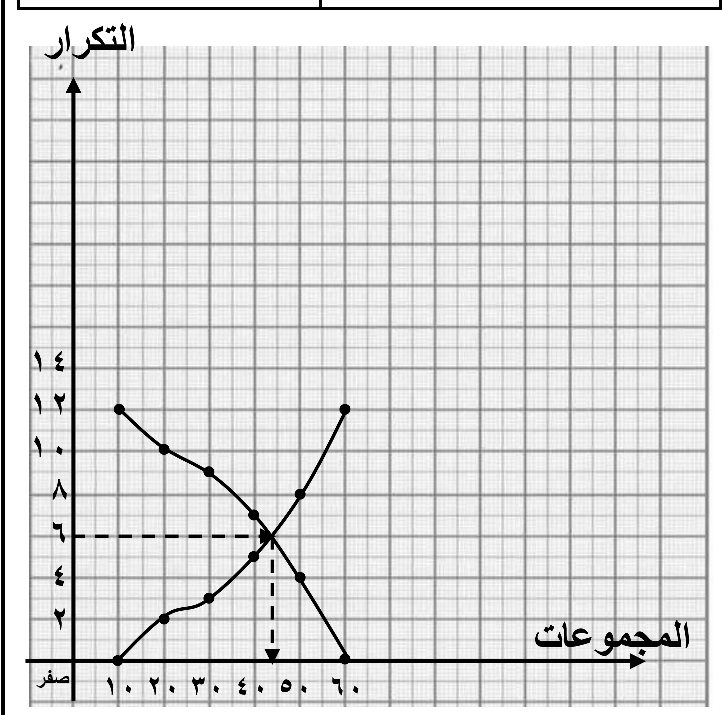
المجموعات	١٠−	٢٠−	٣٠−	٤٠−	٥٠−	المجموع
التكرار	٢	١	٢	٣	٤	١٢

الجدول التكرارى المتجمع الصاعد

الحدود العليا للمجموعات	ك
أقل من ١٠	صفر
أقل من ٢٠	٢
أقل من ٣٠	٣
أقل من ٤٠	٥
أقل من ٥٠	٨
أقل من ٦٠	١٢

الجدول التكرارى المتجمع النازل

الحدود السفلى للمجموعات	ك
١٠ فأكثر	١٢
٢٠ فأكثر	١٠
٣٠ فأكثر	٩
٤٠ فأكثر	٧
٥٠ فأكثر	٤
٦٠ فأكثر	صفر

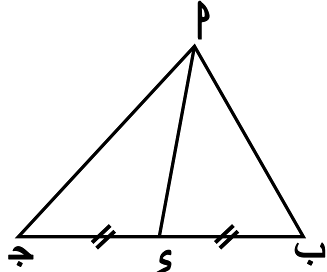


ترتيب الوسيط = $\frac{التكرار}{٢}$ = $\frac{١٢}{٢}$ = ٦

الوسيط ≃ ٤٤

متوسطات المثلث

متوسط المثلث هو قطعة مستقيمة واصلة من رأس من رؤوس المثلث و منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس

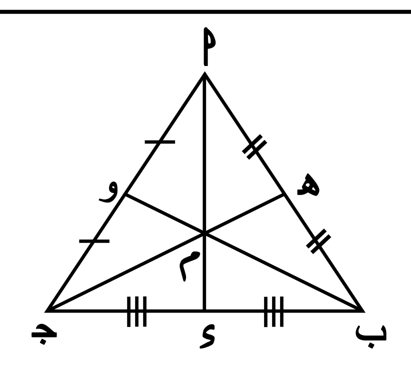


فى Δ م ب جـ

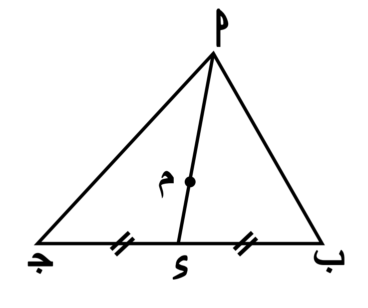
ء منتصف $\overline{\text{م جـ}}$

$\overline{\text{م ء}}$ متوسط

نظرية ١ متوسطات المثلث تتقاطع جميعاً فى نقطة واحدة



نظرية ٢ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل منها بنسبة ١:٢ من جهة القاعدة
أو بنسبة ٢:١ من جهة الرأس



مء : م م = ١:٢

مء : م ء = ١:٣

م م : م ء = ٢:٣

مء = $\frac{١}{٢}$ م م

مء = $\frac{١}{٣}$ م ء

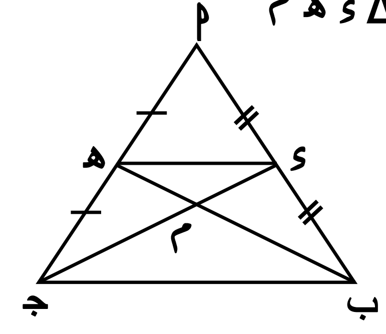
م م = $\frac{٢}{٣}$ م ء

(١) فى الشكل المقابل

ء ،هـ منتصفا $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$ على الترتيب

جـ م = ٤ سم ، ب هـ = ٩ سم ، ب جـ = ٨ سم

احسب محيط Δ ء هـ م



فى Δ م ب جـ

∵ ء منتصف $\overline{\text{م ب}}$ ∴ $\overline{\text{جـ ء}}$ متوسط

∵ هـ منتصف $\overline{\text{م جـ}}$ ∴ $\overline{\text{ب هـ}}$ متوسط

∴ $\overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ متوسطان يتقاطعان في م

∴ م هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل منها بنسبة ١:٢ من جهة القاعدة

∵ جـ م = ٤ سم ∴ ء م = ٤ ÷ ٢ = ٢ سم

∵ ب هـ = ٩ سم ∴ م هـ = ٩ ÷ ٣ = ٣ سم

فى Δ م ب جـ

∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ مرسوم من منتصفى $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$

∴ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ ء هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = ٨ ÷ ٢ = ٤ سم

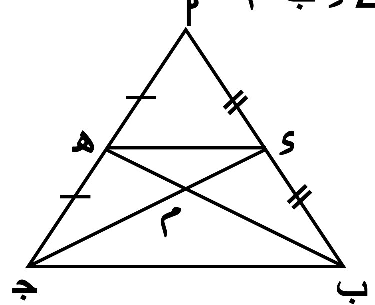
محيط Δ ء هـ م = مجموع أطوال أضلاعه
= ٢ + ٣ + ٤ = ٩ سم

(٢) فى الشكل المقابل

ء ،هـ منتصفا $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ على الترتيب

جـم = ١٢ سم ، ب هـ = ١٥ سم ، أ ب = ٨ سم

احسب محيط Δ ء ب م



فى Δ أ ب جـ

∵ ء منتصف $\overline{\text{أب}}$ ∴ $\overline{\text{جـء}}$ متوسط

∵ هـ منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ ∴ $\overline{\text{بهـ}}$ متوسط

∴ $\overline{\text{جـء}}$ ، $\overline{\text{بهـ}}$ متوسطان يتقاطعان في م

∴ م هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل منها بنسبة ١:٢ من جهة القاعدة

∵ جـم = ١٢سم ∴ ءم = ١٢ ÷ ٢ = ٦ سم

∵ ب هـ = ١٥ سم ∴ م هـ = ١٥ ÷ ٣ = ٥ سم

∴ ب م = ٥ × ٢ = ١٠ سم

∵ ء منتصف $\overline{\text{أب}}$

∵ أب = ٨ سم

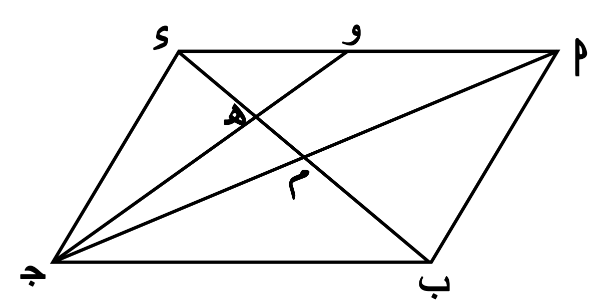
∴ ب ء = ٨ ÷ ٢ = ٤ سم

محيط Δ ء ب م = مجموع أطوال أضلاعه
= ٦ + ١٠ + ٤ = ٢٠ سم

(٣) فى الشكل المقابل

أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه ءهـ = ٢ هـ م

اثبت أن أو = و ء



∵ أ ب جـ ء متوازى أضلاع

∴ القطران ينصف كلاً منهما الآخر

∴ م منتصف $\overline{\text{أجـ}}$

فى Δ أ ء جـ

∵ م منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ ∴ $\overline{\text{ءم}}$ متوسط

∵ ءهـ = ٢ هـ م

∴ هـ هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث

∵ $\overline{\text{جـو}}$ يمر بنقطة هـ ∴ $\overline{\text{جـو}}$ متوسط

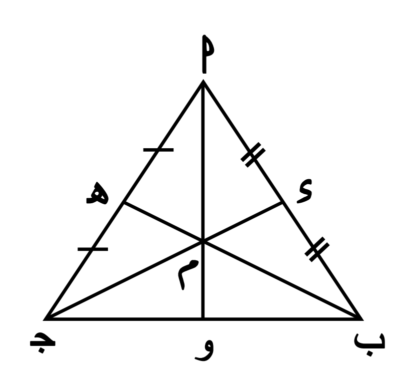
∴ $\overline{\text{جـو}}$ ينصف $\overline{\text{أء}}$

∴ أو = و ء

(٤) فى الشكل المقابل

ء ،هـ منتصفا $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ على الترتيب

،ب جـ = ٨ سم احسب طول $\overline{\text{ب و}}$



فى Δ أ ب جـ

∵ ء منتصف $\overline{\text{أب}}$ ∴ $\overline{\text{جـ ء}}$ متوسط

∵ هـ منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ ∴ $\overline{\text{بهـ}}$ متوسط

∴ $\overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{بهـ}}$ متوسطان يتقاطعان في م

∴ م هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث

∵ $\overline{\text{أو}}$ يمر بنقطة م ∴ $\overline{\text{أو}}$ متوسط

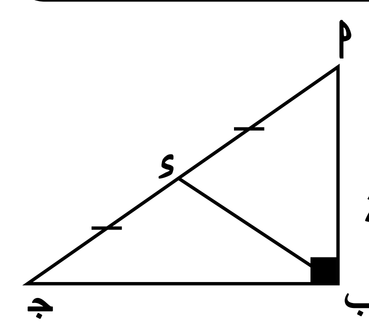
∴ $\overline{\text{أو}}$ ينصف $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ ب و = وجـ

∵ ب جـ = ٨ سم

∴ ب و = ٨ ÷ ٢ = ٤ سم

نظرية ٣ طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى نصف طول وتر هذا المثلث



فى Δ أ ب جـ

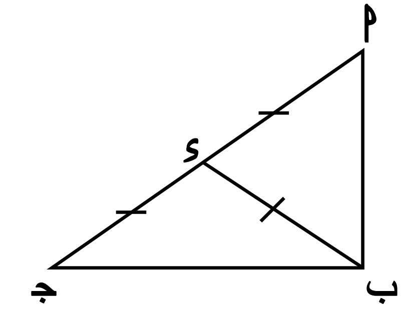
القائم الزاوية في ب

∵ $\overline{\text{ب ء}}$ متوسط

خارج من رأس القائمة

∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ أجـ

عكس نظرية ٣ إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة



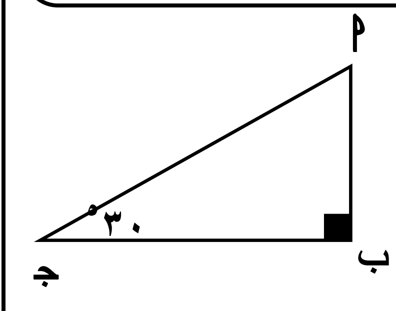
فى Δ أ ب جـ

∵ $\overline{\text{ب ء}}$ متوسط

∵ ب ء = $\frac{١}{٢}$ أجـ

∴ ق(∠ب) = ٩٠°

نتيجة طول الضلع المقابل لزاوية قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى نصف طول الوتر



فى Δ أ ب جـ

القائم الزاوية في ب

∵ ق(∠جـ) = ٣٠°

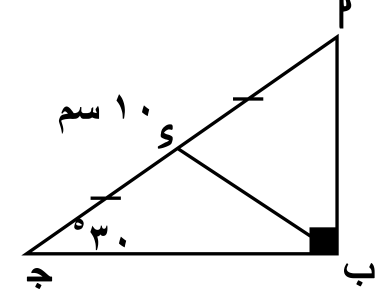
∴ أب = $\frac{١}{٢}$ أجـ

(١) فى الشكل المقابل

ء منتصف $\overline{أجـ}$ ، ق(∠أ ب جـ) = ٩٠°

، ق(∠جـ) = ٣٠° ، أجـ = ١٠ سم

احسب محيط Δ أ ب ء



فى Δ أ ب جـ القائم الزاوية في ب

∵ $\overline{ب ء}$ متوسط خارج من رأس القائمة

∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ أجـ = ١٠ ÷ ٢ = ٥ سم

فى Δ أ ب جـ القائم الزاوية في ب

∵ ق(∠جـ) = ٣٠°

∴ أب = $\frac{١}{٢}$ أجـ = ١٠ ÷ ٢ = ٥ سم

∵ ء منتصف $\overline{أجـ}$

∵ أب = ١٠ سم

∴ ب ء = ١٠ ÷ ٢ = ٥ سم

محيط Δ أ ب ء = مجموع أطوال أضلاعه

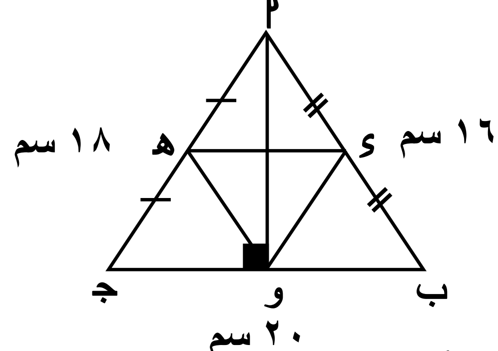
= ٥ + ٥ + ٥ = ١٥ سم

(٢) فى الشكل المقابل

ء ، هـ منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ على الترتيب

، $\overline{أو}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ، أجـ = ١٨ سم ، ب جـ = ٢٠ سم ،

أب = ١٦ سم احسب محيط Δ ء هـ و



فى Δ أ ب جـ

∵ $\overline{ءهـ}$ مرسوم من منتصفى $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$

∴ $\overline{ءهـ}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ ءهـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = ٢٠ ÷ ٢ = ١٠سم

∵ $\overline{أو}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

∴ ق(∠أ و ب) = ق(∠أ و جـ) = ٩٠°

فى Δ أ وب القائم الزاوية في و

∵ $\overline{و ء}$ متوسط خارج من رأس القائمة

∴ و ء = $\frac{١}{٢}$ أب = ١٦ ÷ ٢ = ٨ سم

فى Δ أ وجـ القائم الزاوية في و

∵ $\overline{وهـ}$ متوسط خارج من رأس القائمة

∴ وهـ = $\frac{١}{٢}$ أجـ = ١٨ ÷ ٢ = ٩ سم

محيط Δ ء هـ و = مجموع أطوال أضلاعه

= ١٠ + ٨ + ٩ = ٢٧ سم

(٣) فى الشكل المقابل

ء منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ ، ق(∠أب جـ) = ٩٠°

، ق(∠أجـب) = ٣٠° ، أب = هـ ء = ٥ سم

اثبت أن ق(∠أهـ جـ) = ٩٠°

فى Δ أ بجـ القائم الزاوية في ب

∵ ق(∠أجـب) = ٣٠°

∴ أب = $\frac{١}{٢}$ أجـ

∵ أب = ٥ سم

∴ أجـ = ٥×٢ = ١٠ سم

فى Δ أ بجـ

∵ $\overline{\text{هـ ء}}$ متوسط

∵ هـ ء = ٥ سم ، ∵ أجـ = ١٠ سم

∴ هـ ء = $\frac{١}{٢}$ أجـ

∴ ق(∠أهـ جـ) = ٩٠°

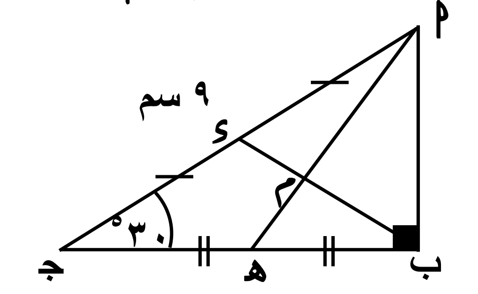
(٤) فى الشكل المقابل

ء منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{بجـ}}$

، أجـ = ٩ سم

، ق(∠أب جـ) = ٩٠° ، ق(∠أجـب) = ٣٠°

أوجد طول كل من $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{ب م}}$ ، $\overline{\text{أب}}$



فى Δ أ بجـ القائم الزاوية في ب

∵ $\overline{\text{ب ء}}$ متوسط خارج من رأس القائمة

∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ أجـ = ٩ ÷ ٢ = ٥و٤سم

∵ $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{أهـ}}$ متوسطان يتقاطعان في م

∴ م هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل منها بنسبة ١:٢ من جهة القاعدة

∵ ب ء = ٥و٤ سم

∴ م ء = ٥و٤÷٣ = ٥و١ سم

∴ ب م = ٥و١ × ٢ = ٣ سم

فى Δ أ بجـ القائم الزاوية في ب

∵ ق(∠جـ) = ٣٠°

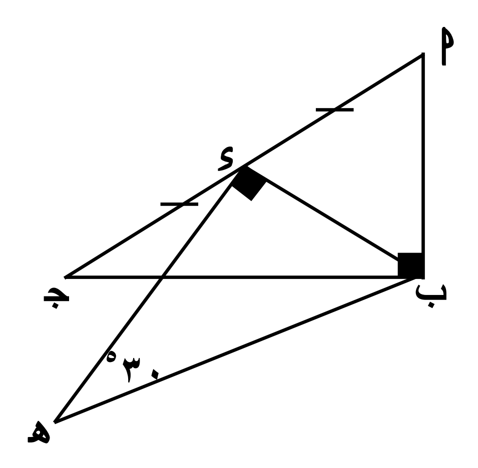
∴ أب = $\frac{١}{٢}$ أجـ = ٩ ÷ ٢ = ٥و٤ سم

(٥) فى الشكل المقابل

ء منتصف $\overline{\text{م جـ}}$ ، ق(∠ب هـ ء) = ٣٠°

، ق(∠م ب جـ) = ق(∠ب ء هـ) = ٩٠°

اثبت أن م جـ = ب هـ



فى Δ م ب جـ القائم الزاوية في ب

∵ $\overline{\text{ب ء}}$ متوسط خارج من رأس القائمة

∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ م جـ [١]

فى Δ ب ء هـ القائم الزاوية في ء

∵ ق(∠هـ) = ٣٠°

∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ ب هـ [٢]

من ١ ، ٢

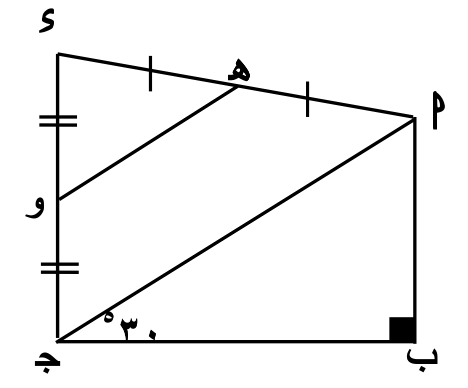
∴ م جـ = ب هـ

(٦) فى الشكل المقابل

هـ ، و منتصفا $\overline{\text{م ء}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$

، ق(∠م جـ ب) = ٣٠° ، ق(∠م ب جـ) = ٩٠°

اثبت أن م ب = هـ و



فى Δ م ب جـ القائم الزاوية في ب

∵ ق(∠جـ) = ٣٠°

∴ م ب = $\frac{١}{٢}$ م جـ [١]

فى Δ م ء جـ

∵ $\overline{\text{هـ و}}$ مرسوم من منتصفى $\overline{\text{م ء}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$

∴ $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{م جـ}}$

∴ هـ و = $\frac{١}{٢}$ م جـ [٢]

من ١ ، ٢

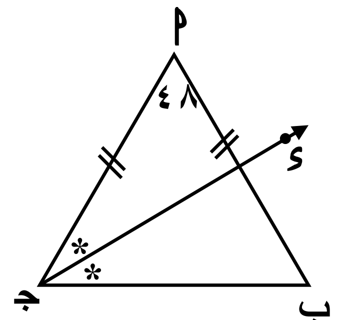
∴ م ب = هـ و

المثلث متساوى الساقين

نظرية ١ زاويتا القاعدة فى المثلث متساوى الساقين متطابقتان

نتيجة
إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإن زواياه الثلاثة تكون متطابقة وقياس كل منها ٦٠°

(١) فى الشكل المقابل
ق(∠أ) = ٤٨° ، أب = أجـ ، جـد ينصف (∠أجـب) أوجد ق(∠ب) ، ق(∠بجـد)



فى Δ أبجـ متساوى الساقين

∵ أب = أجـ ∴ ق(∠ب) = ق(∠أجـب)

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة=١٨٠°

∵ ق(∠أ) = ٤٨°

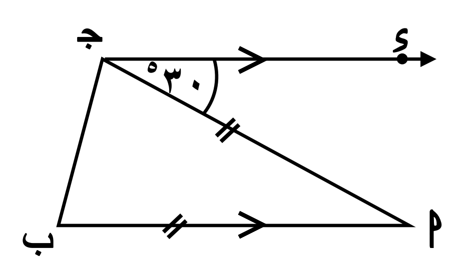
∴ ق(∠ب) = ق(∠أجـب)

= (١٨٠° - ٤٨°) ÷٢ = ٦٦° ■

∵ جـد ينصف (∠أجـب)

∴ ق(∠بجـد) = ٦٦° ÷٢ = ٣٣° ■

(٢) فى الشكل المقابل
ق(∠دجـأ) = ٣٠°، أب = أجـ ، جـد // أب
أوجد قياسات زوايا Δ أبجـ



∵ جـد // أب ، أجـ قاطع لهما

∴ ق(∠أ) = ق(∠أجـد) = ٣٠° بالتبادل

فى Δ أبجـ متساوى الساقين

∵ أب = أجـ ∴ ق(∠ب) = ق(∠أجـب)

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة=١٨٠°

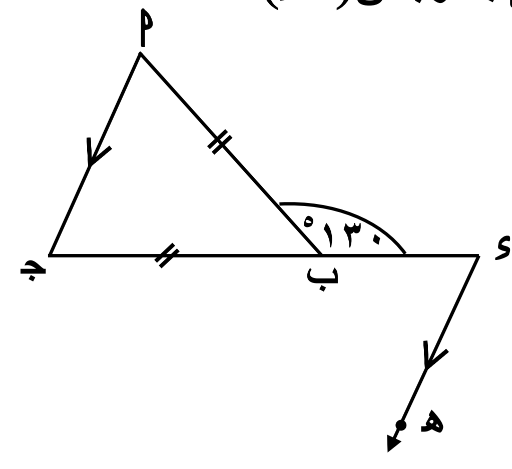
∵ ق(∠أ) = ٣٠°

∴ ق(∠ب) = ق(∠أجـب)

= (١٨٠° - ٣٠°) ÷٢ = ٧٥° ■

(٣) فى الشكل المقابل

ق(∠ ٨ب ى) = ١٣٠° ، ٨ب = ب جـ ، ى هـ // ٨ جـ أوجد ق(∠ ى)



∵ ب ∈ ى جـ

∴ ق(∠ ٨ب جـ) = ١٨٠° - ١٣٠° = ٥٠°

فى Δ ٨ ب جـ متساوى الساقين

∵ ٨ب = ب جـ ∴ ق(∠ ٨) = ق(∠ جـ)

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∵ ق(∠ ٨ب جـ) = ٥٠°

∴ ق(∠ ٨) = ق(∠ جـ)

= (١٨٠° - ٥٠°) ÷ ٢ = ٦٥°

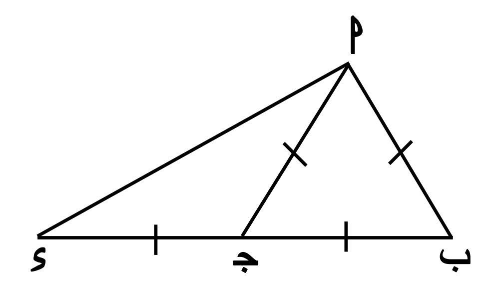
∵ ى هـ // ٨ جـ ، ى جـ قاطع لهما

∴ ق(∠ ى) = ق(∠ جـ) = ٦٥° بالتبادل

(٤) فى الشكل المقابل

Δ ٨ ب جـ متساوى الأضلاع ، ٨ جـ = جـ ى

اثبت أن ب ٨ ⊥ ٨ ى



∵ Δ ٨ ب جـ متساوى الأضلاع

∴ ق(∠ ٨ جـ ب) = ٦٠°

∵ جـ ∈ ب ى

∴ ق(∠ ٨ جـ ى) = ١٨٠° - ٦٠° = ١٢٠°

فى Δ ٨ جـ ى متساوى الساقين

∵ ٨ جـ = جـ ى

∴ ق(∠ ى) = ق(∠ جـ ٨ ى)

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∵ ق(∠ ٨ جـ ى) = ١٢٠°

∴ ق(∠ ى) = ق(∠ جـ ٨ ى)

= (١٨٠° - ١٢٠°) ÷ ٢ = ٣٠°

∵ ق(∠ ب ٨ ى) =
ق(∠ ب ٨ جـ) + ق(∠ جـ ٨ ى)

∴ ق(∠ ب ٨ ى) = ٦٠° + ٣٠° = ٩٠°

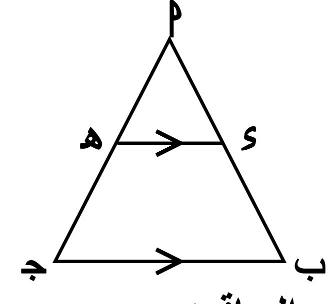
∴ ب ٨ ⊥ ٨ ى

نظرية ٢ إذا تطابقت زاويتان فى مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متطابقين و يكون المثلث متساوى الساقين

نتيجة
إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون مثلث متساوى الأضلاع

المثلث متساوى الساقين الذى قياس إحدى زواياه ٦٠° يكون متساوى الأضلاع

(١) فى الشكل المقابل ؟ب = ؟جـ ، $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بجـ}$
اثبت أن ؟ ء = ؟ هـ



فى Δ ؟ ب جـ متساوى الساقين

∵ ؟ب = ب جـ ∴ ق(∠ب) = ق(∠ جـ) [١]

∵ $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بجـ}$ ، $\overline{؟ب}$ قاطع لهما

∴ ق(∠ب) = ق(∠؟ءهـ) بالتناظر [٢]

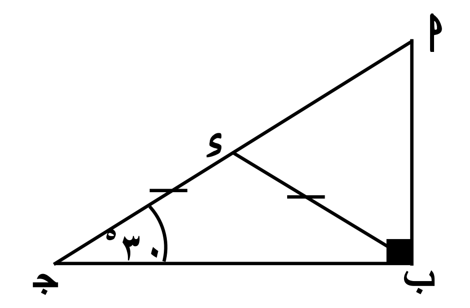
∵ $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بجـ}$ ، $\overline{؟جـ}$ قاطع لهما

∴ ق(∠جـ) = ق(∠؟هـ ء) بالتناظر [٣]

من ١ ، ٢ ، ٣
∴ ق(∠؟ءهـ) = ق(∠؟هـ ء)

∴ ؟ ء = ؟ هـ

(٢) فى الشكل المقابل ب ء = ء جـ
، ق(∠؟ب جـ) = ٩٠° ، ق(∠ جـ) = ٣٠°
اثبت أن Δ ؟ ب ء متساوى الأضلاع



فى Δ بءجـ متساوى الساقين
∵ ب ء = ء جـ
∴ ق(∠ءبجـ) = ق(∠ءجـب) = ٣٠°

فى Δ بءجـ
∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°
∴ ق(∠ب ء جـ) =
١٨٠° - (٣٠° + ٣٠°) = ١٢٠°

∵ ء ∈ $\overline{؟جـ}$
∴ ق(∠؟ءب) = ١٨٠° - ١٢٠° = ٦٠° [١]

∵ ق(∠؟ب جـ) = ٩٠°
، ∵ ق(∠ءبجـ) = ٣٠°
∴ ق(∠؟ب ء) = ٩٠° - ٣٠° = ٦٠° [٢]

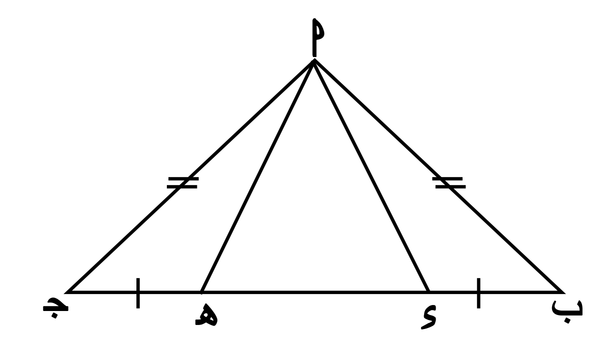
فى Δ ؟ب ء
∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°
∴ ق(∠؟) =
١٨٠° - (٦٠° + ٦٠°) = ٦٠° [٣]

من ١ ، ٢ ، ٣
∴ ق(∠؟ء ب) = ق(∠؟ب ء) = ق(∠؟)
∴ Δ ؟ ب ء متساوى الأضلاع

(٣) فى الشكل المقابل

ﻫ ب = ﻫ جـ ،ب ء = جـ هـ

اثبت أن Δ ﻫ ءهـ متساوى الساقين



فى Δ ﻫ بجـ متساوى الساقين

∵ ﻫ ب = ﻫ جـ ∴ ق(∠ ب)= ق(∠ جـ)

فى Δ ﻫ ب ء ، Δ ﻫ جـ هـ

فيهما { ﻫ ب = ﻫ جـ
ب ء = جـ هـ
ق(∠ب)= ق(∠جـ) }

∴ يتطابق المثلثان و ينتج أن

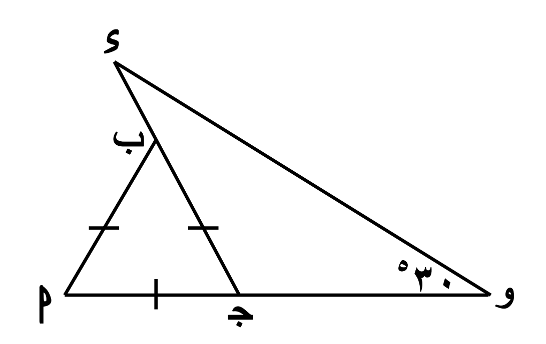
ﻫ ء = ﻫ هـ

∴ Δ ﻫ ءهـ متساوى الساقين

(٤) فى الشكل المقابل

Δ ﻫ بجـ متساوى الأضلاع ،ق(∠و)= ٣٠°

اثبت أن Δ وجـ ء متساوى الساقين



∵ Δ ﻫ بجـ متساوى الأضلاع

∴ ق(∠ﻫ جـ ب) = ٦٠°

∵ جـ ∈ $\overline{\text{ﻫ و}}$

∴ ق(∠وجـ ء) = ١٨٠° - ٦٠° = ١٢٠°

فى Δ وجـ ء

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة= ١٨٠°

∴ ق(∠ء) =

١٨٠° - (١٢٠° + ٣٠°)= ٣٠°

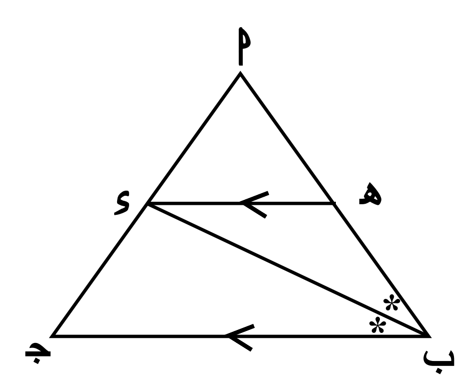
فى Δ وجـ ء

ق(∠ و)= ق(∠ ء) = ٣٠°

∴ جـ و = جـ ء

∴ Δ وجـ ء متساوى الساقين

(٥) فى الشكل المقابل
هـ ء // ب جـ ، ب ء ينصف (∠ م ب جـ)
اثبت أن Δ هـ ب ء متساوى الساقين



∵ هـ ء // ب جـ ، ء ب قاطع لهما

∴ ق(∠ هـ ء ب) = ق(∠ ء ب جـ) بالتبادل

∵ ب ء ينصف (∠ م ب جـ)

∴ ق(∠ هـ ب ء) = ق(∠ ء ب جـ)

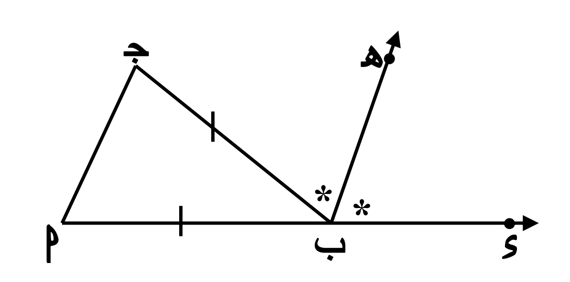
∴ ق(∠ هـ ء ب) = ق(∠ هـ ب ء)

∴ هـ ب = هـ ء

∴ Δ هـ ب ء متساوى الساقين

---

(٦) فى الشكل المقابل
م ب = ب جـ، ب هـ ينصف (∠ ء ب جـ)
اثبت أن ب هـ // م جـ



فى Δ م ب جـ

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ م) + ق(∠ جـ) + ق(∠ م ب جـ) = ١٨٠° ١

∵ ب ∈ م ء

∴ ق(∠ ء ب جـ) + ق(∠ م ب جـ) = ١٨٠° ٢

من ١ ، ٢

∴ ق(∠ م) + ق(∠ جـ) = ق(∠ ء ب جـ) ٣

∵ ب هـ ينصف (∠ ء ب جـ)

∴ ق(∠ ء ب هـ) = ق(∠ هـ ب جـ) ٤

فى Δ م ب جـ متساوى الساقين

∵ م ب = ب جـ ∴ ق(∠ م) = ق(∠ جـ) ٥

من ٣ ، ٤ ، ٥

∴ ق(∠ هـ ب جـ) = ق(∠ جـ)

و هما في وضع تبادل

∴ ب هـ // م جـ

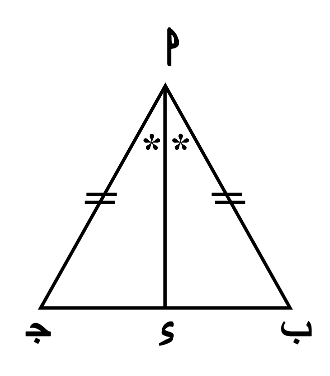
نتائج على نظريات المثلث متساوى الساقين

نتيجة ١ متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس و يكون عمودياً على القاعدة

فى Δ ﻡ ب جـ
∵ ﻡب = ﻡجـ
∵ ﻡ ء ينصف ب جـ
∴ ﻡ ء ينصف (∠ ﻡ)
∴ ﻡ ء ⊥ ب جـ

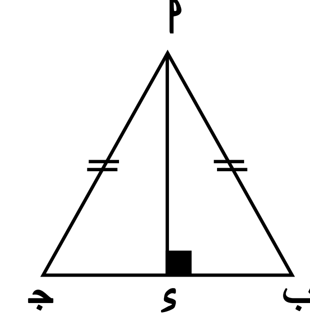
نتيجة ٢ منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة و يكون عمودياً عليها

فى Δ ﻡ ب جـ
∵ ﻡب = ﻡجـ
∵ ﻡ ء ينصف (∠ ﻡ)
∴ ﻡ ء ينصف ب جـ
∴ ﻡ ء ⊥ ب جـ



نتيجة ٣ المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوى الساقين عمودياً على القاعدة ينصف كلاً من القاعدة و زاوية الرأس

فى Δ ﻡ ب جـ
∵ ﻡب = ﻡجـ
∵ ﻡ ء ⊥ ب جـ
∴ ﻡ ء ينصف ب جـ
∴ ﻡ ء ينصف (∠ ﻡ)



(١) فى الشكل المقابل
ﻡب = ﻡجـ ، ق(∠ب ﻡ ء) = ٣٠°
، ﻡ ء ⊥ ب جـ
ب جـ = ١٠ سم
أوجد طول كل من ب ء ، ﻡ ء
و مساحة Δ ﻡ ب جـ

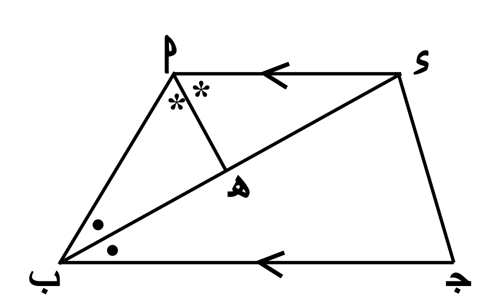
فى Δ ﻡ ب جـ متساوى الساقين
∵ ﻡب = ﻡجـ
∵ ﻡ ء ⊥ ب جـ
∴ ﻡ ء ينصف (∠ ﻡ)
∴ ﻡ ء ينصف ب جـ
∵ ب جـ = ١٠ سم ∴ ب ء = ١٠ ÷ ٢ = ٥ سم م١

فى Δ ﻡ ب ء القائم الزاوية في ء
∵ ق(∠ب ﻡ ء) = ٣٠°
∴ ب ء = ١/٢ ﻡب
∴ ﻡب = ٥ × ٢ = ١٠ سم

فى Δ ﻡ ب ء القائم الزاوية في ء
(ﻡ ء)² = (ﻡب)² - (ب ء)²
(ﻡ ء)² = (١٠)² - (٥)²
(ﻡ ء)² = ١٠٠ - ٢٥ = ٧٥
ﻡ ء = √٧٥ = ٥ √٢ سم م٢

مساحة Δ ﻡ ب جـ = ١/٢ طول القاعدة × الإرتفاع
مساحة Δ ﻡ ب جـ = ١/٢ × ب جـ × ﻡ ء
مساحة Δ ﻡ ب جـ = ١/٢ × ١٠ × ٥ √٢
= ٢٥ √٢ سم² م٣

(٢) فى الشكل المقابل
م هـ ينصف (∠ ء م ب)، ب هـ ينصف (∠ م ب جـ)
م ء // جـ ب اثبت أن م ب = م ء ، ب هـ = هـ ء
، م هـ ⊥ ب ء



∵ م ء // جـ ب ، ء ب قاطع لهما

∴ ق(∠ م ء ب) = ق(∠ ء ب جـ) بالتبادل ١

، ∵ ب هـ ينصف (∠ م ب جـ)

∴ ق(∠ م ب ء) = ق(∠ ء ب جـ) ٢

من ١ ، ٢

∴ ق(∠ م ء ب) = ق(∠ م ب ء)

∴ م ب = م ء م١

فى Δ م ء ب متساوى الساقين

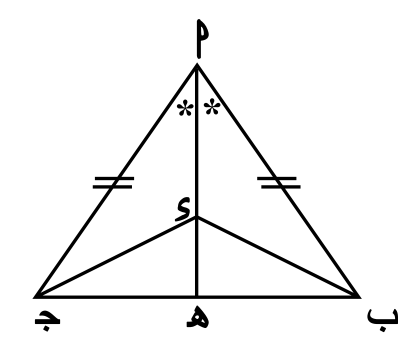
∵ م ب = م ء

∵ م هـ ينصف (∠ م)

∴ م هـ ينصف ب ء ∴ ب هـ = هـ ء م٢

∴ م هـ ⊥ ب ء م٣

(٣) فى الشكل المقابل م هـ ينصف (∠ ب م جـ)
م ب = م جـ اثبت أن ب هـ = هـ جـ ، ب ء = جـ ء



فى Δ م ب جـ متساوى الساقين

∵ م ب = م جـ

∵ م هـ ينصف (∠ م)

∴ م هـ ينصف ب جـ ∴ ب هـ = هـ جـ م١

∴ م هـ ⊥ ب جـ

فى Δ ب ء جـ

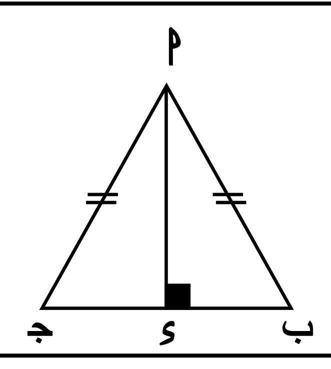
∵ ء هـ ينصف ب جـ

∵ ء هـ ⊥ ب جـ

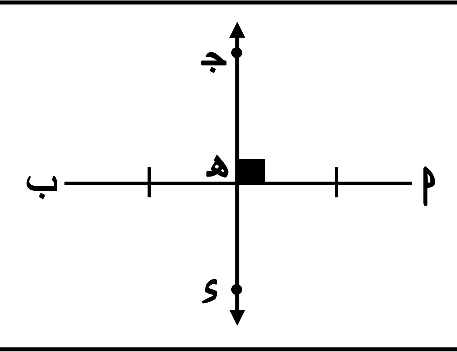
∴ ء ب = ء جـ م٢

∴ ء هـ ينصف (∠ ب ء جـ)

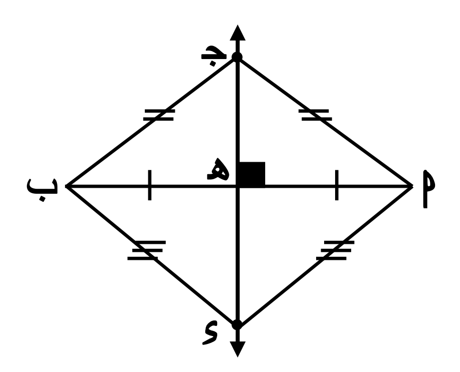
محور التماثل للمثلث المتساوى الساقين هو المستقيم المرسوم من رأسه عمودياً على قاعدته



محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودى عليها من منتصفها



أى نقطة على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها



عدد محاور تماثل المثلث متساوى الأضلاع = ٣
عدد محاور تماثل المثلث متساوى الساقين = ١
عدد محاور تماثل المثلث مختلف الأضلاع = ٠

التباين

مسلمات التباين

إذا كان س ، ص ، ع ، ل ، أ ، ب أعداد حقيقية

(١) إذا كان س > ص فإن س+ع > ص+ع
مثال س = ٧ ، ص = ٥ ، ع = ٣
س > ص   ٧ > ٥
س+ع > ص+ع   ٧+٣ > ٥+٣   ١٠ > ٨

(٢) إذا كان س > ص فإن س-ع > ص-ع
مثال س = ٧ ، ص = ٥ ، ع = ٣
س > ص   ٧ > ٥
س-ع > ص-ع   ٧-٣ > ٥-٣   ٤ > ٢

(٣) إذا كان س > ص ، ع عدداً موجباً ع > ٠
فإن س ع > ص ع
مثال س = ٧ ، ص = ٥ ، ع = ٣
س > ص   ٧ > ٥
س ع > ص ع   ٧×٣ > ٥×٣   ٢١ > ١٥

(٤) إذا كان س > ص ، ع عدداً سالباً ع < ٠
فإن س ع > ص ع
مثال س = ٧ ، ص = ٥ ، ع = - ٣
س > ص   ٧ > ٥
س ع < ص ع
٧×-٣ < ٥×-٣   - ٢١ < -١٥

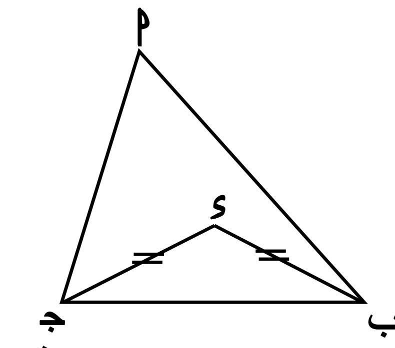
(٥) إذا كان س > ص ، ص > ع فإن س > ع
مثال س = ٧ ، ص = ٥ ، ع = ٣
س > ص   ٧ > ٥ ، ص > ع   ٥ > ٣
فإن س > ع   ٧ > ٣

(٦) إذا كان س > ص ، أ > ب
فإن س+أ > ص+ب
مثال س = ٧ ، ص = ٥ ، أ = ٣ ، ب = ١
٧+٣ > ٥+١   ١٠ > ٦

(١) فى الشكل المقابل

ء ب = ء ج ، ق(∠أ ج ب) > ق(∠أ ب ج)

اثبت أن ق(∠أ ج ء) > ق(∠أ ب ء)



فى Δ ء ب ج متساوى الساقين

∵ ء ب = ء ج

∴ ق(∠ ء ب ج) = ق(∠ ء ج ب) [١]

∵ ق(∠أ ج ب) > ق(∠أ ب ج) [٢]

بطرح ١ من ٢

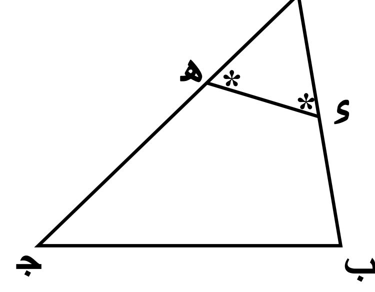
∴ ق(∠أ ج ء) > ق(∠أ ب ء)

---

(٢) فى الشكل المقابل

ق(∠أ ء هـ) = ق(∠أ هـ ء)، أ ج > أ ب

اثبت أن ج هـ > ب ء



فى Δ أ ء هـ

∵ ق(∠ أ ء هـ) = ق(∠ أ ء هـ)

∴ أ هـ = أ ء [١]

∵ أ ج > أ ب [٢]

بطرح ١ من ٢

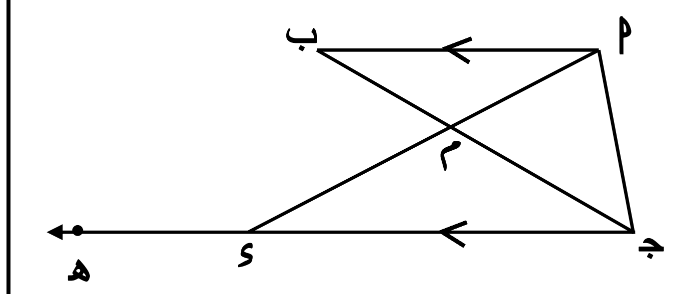
∴ ج هـ > ب ء

(٢) فى الشكل المقابل

أ ب // ج هـ اثبت أن

ق(∠أ ج ء) > ق(∠أ ب ج)

ق(∠أ ء هـ) > ق(∠أ ب ج)



∵ أ ب // ج هـ ، ب ج قاطع لهما

∴ ق(∠أ ب ج) = ق(∠ب ج ء) بالتبادل [١]

∵ ق(∠أ ج ء) = ق(∠أ ج ب) + ق(∠ب ج ء)

∴ ق(∠أ ج ء) > ق(∠ب ج ء) [٢]

من ١ ، ٢

∴ ق(∠أ ج ء) > ق(∠أ ب ج) م١

∵ (∠أ ء هـ) خارجة عن Δ أ ج ء

∴ ق(∠أ ء هـ) = ق(∠ج أ ء) + ق(∠أ ج ء)

∴ ق(∠أ ء هـ) > ق(∠أ ج ء)

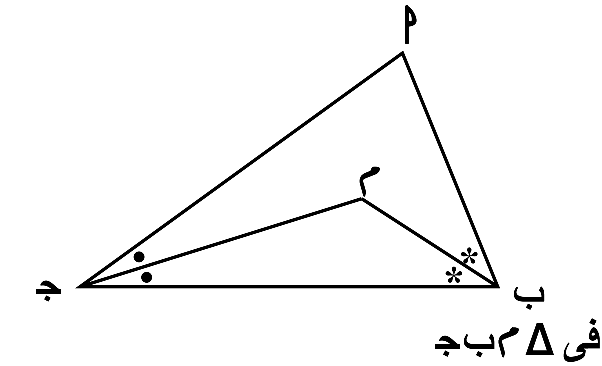
، ∵ ق(∠أ ج ء) > ق(∠أ ب ج) برهاناً

∴ ق(∠أ ء هـ) > ق(∠أ ب ج) م٢

المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث

نظرية ٣ إذا اختلف طولا ضلعين في مثلث فأكبرهما في الطول يقابله زاوية أكبر في القياس من قياس الزاوية المقابلة للضلع الآخر

(١) فى الشكل المقابل م جـ > م ب
جـ م ينصف (∠ ٲ جـ ب)، ب م ينصف (∠ ٲ ب جـ)
اثبت أن
ق(∠ ٲ ب جـ) > ق(∠ ٲ جـ ب)



فى Δ م ب جـ

∵ م جـ > م ب

∴ ق(∠ م ب جـ) > ق(∠ م جـ ب) [١]

فى Δ ٲ ب جـ

∵ جـ م ينصف (∠ ٲ جـ ب) [٢]

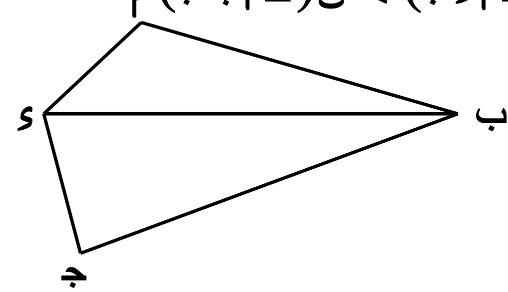
، ∵ ب م ينصف (∠ ٲ ب جـ) [٣]

من ١ ، ٢ ، ٣

∴ ق(∠ ٲ ب جـ) > ق(∠ ٲ جـ ب)

---

(٢) فى الشكل المقابل ٲ ب > ٲ ء ، ب جـ > جـ ء
اثبت أن ق(∠ ٲ ء جـ) > ق(∠ ٲ ب جـ)



فى Δ ٲ ب ء

∵ ٲ ب > ٲ ء

∴ ق(∠ ٲ ء ب) > ق(∠ ٲ ب ء) [١]

فى Δ جـ ب ء

∵ ب جـ > جـ ء

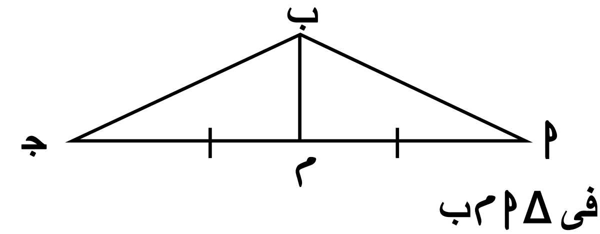
∴ ق(∠ جـ ء ب) > ق(∠ جـ ب ء) [٢]

بجمع ١ ، ٢

∴ ق(∠ ٲ ء جـ) > ق(∠ ٲ ب جـ)

---

(٣) فى الشكل المقابل ب م < ٲ م ، ب م متوسط فى Δ ٲ ب جـ . اثبت أن (∠ ٲ ب جـ) منفرجة



فى Δ ٲ م ب

∵ ٲ م > م ب

∴ ق(∠ ٲ ب م) > ق(∠ ب ٲ م) [١]

∵ ٲ م = جـ م ∴ جـ م > م ب

فى Δ ٲ م جـ

∵ جـ م > م ب

∴ ق(∠ جـ ب م) > ق(∠ ب جـ م) [٢]

بجمع ١ ، ٢

∴ ق(∠ ٲ ب جـ) > ق(∠ ب ٲ م) + (∠ ب جـ م)

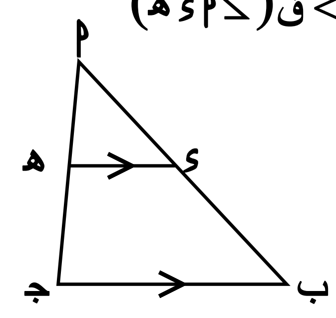
فى Δ ٲ م جـ

∴ ق(∠ ب) > ق(∠ ٲ) + (∠ جـ)

∴ (∠ ٲ ب جـ) منفرجة

(٤) فى الشكل المقابل أب > أجـ ، ءهـ // بجـ

اثبت أن ق(∠أهـ ء) > ق(∠أءهـ)



فى Δ أبجـ

∵ أب > أجـ

∴ ق(∠جـ) > ق(∠ب) (١)

∵ ءهـ // بجـ

∴ ق(∠جـ) = ق(∠أهـء) بالتناظر (٢)

∴ ق(∠ب) = ق(∠أءهـ) بالتناظر (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣

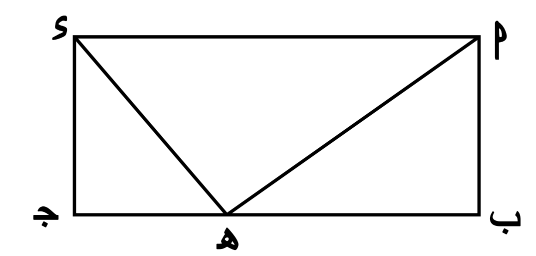
∴ ق(∠أهـ ء) > ق(∠أءهـ)

---

(٥) فى الشكل المقابل أبجـ ء مستطيل

، أهـ > هـ ء

اثبت أن ق(∠هـأب) > ق(∠هـءجـ)



فى Δ أهـء

∵ أهـ > هـ ء

∴ ق(∠أءهـ) > ق(∠ءأهـ) (١)

∵ أبجـ ء مستطيل

∴ ق(∠أ) = ق(∠ء) = ٩٠° (٢)

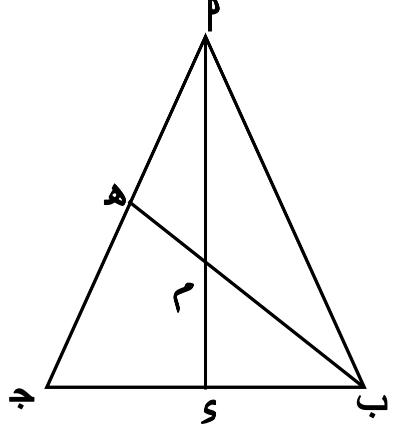
من ١ ، ٢

∴ ق(∠هـأب) > ق(∠هـءجـ)

(٦) فى الشكل المقابل

أء ، بهـ متوسطان، م ء > م هـ

اثبت أن ق(∠مب أ) > ق(∠مأب)



فى Δ أبجـ

∵ أء ، بهـ متوسطان يتقاطعان في م

∴ م هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل منها بنسبة ١:٢ من جهة القاعدة

∴ مء = $\frac{١}{٢}$ أم

∴ مهـ = $\frac{١}{٢}$ بم

∵ م ء > م هـ

∴ أم > م ب

فى Δ أمب

∵ أم > مب

∴ ق(∠مب أ) > ق(∠مأب)

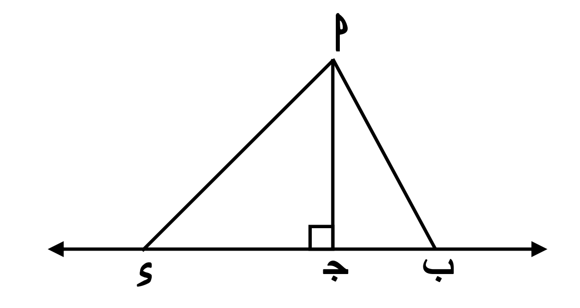
المقارنة بين أطوال الأضلاع فى المثلث

نظرية ٤ إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث فأكبرهما في القياس يقابلها ضلع أكبر في الطول من طول الضلع المقابل للزاوية الأخرى

نتيجة ١ في المثلث القائم الزاوية يكون الوتر أطول أضلاع المثلث

ملاحظة في المثلث المنفرج الزاوية يكون الضلع المقابل للزاوية المنفرجة أطول أضلاع المثلث

نتيجة ٢ طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من نقطة خارج مستقيم معلوم إلى هذا المستقيم المعلوم أصغر من طول أى قطعة مستقيمة مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم المعلوم



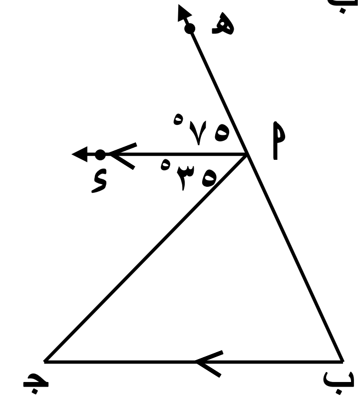
تعريف بُعد أى نقطة عن مستقيم معلوم هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة إلى المستقيم المعلوم

(١) فى الشكل المقابل

أء // ب جـ

، ق(∠جـ أ ء) = ٣٥° ، ق(∠ء أ هـ) = ٧٥°

اثبت أن أجـ > أب



∵ أء // ب جـ

∴ ق(∠ب) = ق(∠هـ أ ء) = ٧٥° بالتناظر

∴ ق(∠جـ) = ق(∠جـ أ ء) = ٣٥° بالتبادل

∴ ق(∠ب) > ق(∠جـ)

فى Δ أب جـ

∵ ق(∠ب) > ق(∠جـ)

∴ أهـ > هـ ء

---

(٢) فى Δ أب جـ إذا كان ق(∠أ) = ٤٠°

، ق(∠ب) = ١١٠° ، ق(∠جـ) = ٣٠°

رتب أطوال أضلاع Δ أب جـ تصاعدياً

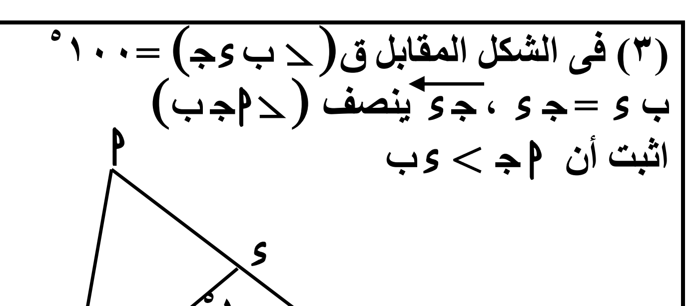
∵ ق(∠جـ) < ق(∠أ) < ق(∠ب)

∴ أب < ب جـ < أجـ

(٣) فى الشكل المقابل ق(∠ ب ء جـ) = ١٠٠°

ب ء = جـ ء ، $\overrightarrow{جـء}$ ينصف (∠ أ جـ ب)

اثبت أن أجـ > ء ب





فى Δ ء ب جـ متساوى الساقين

∵ ء ب = ء جـ

∴ ق(∠ ء ب جـ) = ق(∠ ء جـ ب)

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∵ ق(∠ ب ء جـ) = ١٠٠°

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ ء جـ ب)

= (١٨٠° - ١٠٠°) ÷ ٢ = ٤٠°

∵ $\overrightarrow{جـء}$ ينصف (∠ أ جـ ب)

∴ ق(∠ ء جـ ب) = ق(∠ ء جـ أ) = ٤٠°

∵ ء ∈ $\overline{أب}$

∴ ق(∠ أ ء جـ) = ١٨٠° - ١٠٠° = ٨٠°

فى Δ أ ء جـ

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° - (٨٠° + ٤٠°) = ٦٠°

فى Δ أ ء جـ

∵ ق(∠ أ ء جـ) = ٨٠° ، ∵ ق(∠ أ) = ٦٠°

∴ ق(∠ أ ء جـ) > ق(∠ أ)

∴ أجـ > ء جـ ، ∵ ب ء = جـ ء

∴ أجـ > ب ء

(٤) فى الشكل المقابل أب = أجـ

اثبت أن أب > أ ء

فى Δ أ ب جـ متساوى الساقين

∵ أب = أجـ ∴ ق(∠ ب) = ق(∠ جـ) (١)

∵ (∠ أ ء ب) خارجة عن Δ أ ء جـ

∴ ق(∠ أ ء ب) > ق(∠ جـ) (٢)

من ١ ، ٢

∴ ق(∠ أ ء ب) > ق(∠ ب)

فى Δ أ ب ء

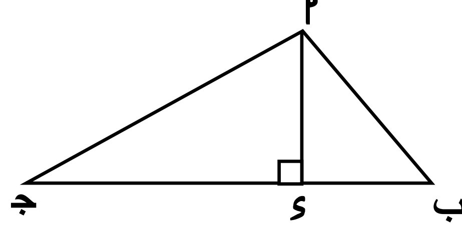
∵ ق(∠ أ ء ب) > ق(∠ ب)

∴ أب > أ ء

---

(٥) فى الشكل المقابل، أجـ > أب ، $\overline{أء} \perp \overline{بجـ}$

اثبت أن ق(∠ ء أ جـ) > ق(∠ ء أ ب)



فى Δ أ ب جـ

∵ أجـ > أب

∴ ق(∠ ب) > ق(∠ جـ) (١)

فى Δ أ ء ب القائم في ء

ق(∠ ب) + ق(∠ ء أ ب) = ٩٠° (٢)

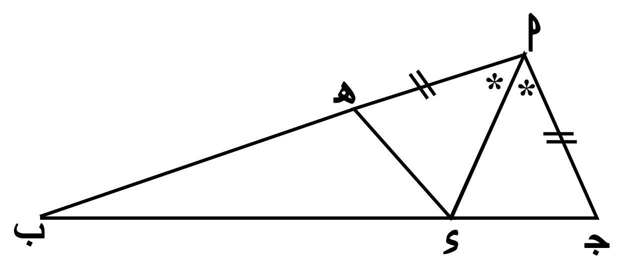
فى Δ أ ء جـ القائم في ء

ق(∠ جـ) + ق(∠ ء أ جـ) = ٩٠° (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ∴ ق(∠ ء أ جـ) > ق(∠ ء أ ب)

٠١٠٦٣٨١٥٤٠٠ أ/ طارق عبد الجليل

(٦) فى الشكل المقابل، أجـ > ءجـ ، أهـ = أجـ
ق(∠جـأء) = ق(∠بأء) برهن أن :
ءهـ = ءجـ ، ق(∠بهـء) > ق(∠أءجـ)
، ب ء > ءجـ



فى Δ أجـء ، Δ أهـء

فيهما { أجـ = أهـ
أء ضلع مشترك
ق(∠جـأء) = ق(∠هـأء) }

∴ يتطابق المثلثان و ينتج أن

ءهـ = ءجـ

، ق(∠أءجـ) = ق(∠أءهـ) (١)

∵ (∠بهـء) خارجة عن Δ أ ءهـ

∴ ق(∠بهـء) > ق(∠أءهـ) (٢)

من ١ ، ٢ ∴ ق(∠بهـء) > ق(∠أءجـ)

∵ (∠أءجـ) خارجة عن Δ أ ءب

∴ ق(∠أءجـ) > ق(∠ب)

∵ ق(∠بهـء) > ق(∠أءجـ)

∴ ق(∠بهـء) > ق(∠ب)

فى Δ ءهـب

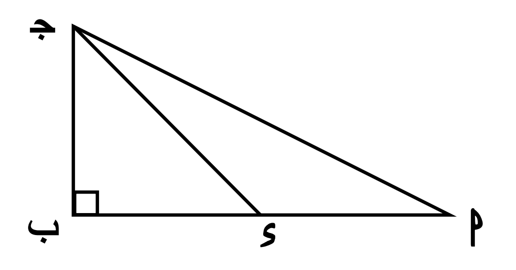
∵ ق(∠بهـء) > ق(∠ب)

∴ ب ء > ءهـ

، ∵ ءهـ = ءجـ من التطابق

∴ ب ء > ءجـ

(٧) فى الشكل المقابل
ق(∠ب ء جـ) = ٩٠° اثبت أن أجـ > جـ ء



فى Δ أجـ ء

∵ (∠أءجـ) خارجة عن Δ جـءب

∴ ق(∠أءجـ) = ق(∠ب) + ق(∠ءجـب)

∴ ق(∠أءجـ) = ٩٠° + ق(∠ءجـب)

∴ (∠أءجـ) منفرجة

فى Δ أجـ ء ∵ (∠أءجـ) منفرجة

∴ أجـ > جـ ء

---

(٨) فى Δ أبجـ إذا كان أجـ = ٤ سم
، أب = ٥ سم ، ب جـ = ٣ سم

رتب قياسات زوايا Δ أبجـ تصاعدياً

∵ ب جـ < أجـ < أب

∴ ق(∠أ) < ق(∠ب) < ق(∠جـ)

متباينة المثلث

مجموع طولى أى ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث

أوجد الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث فى المثلث إذا كان طول الضلعين الآخرين ٤ سم ، ٧ سم

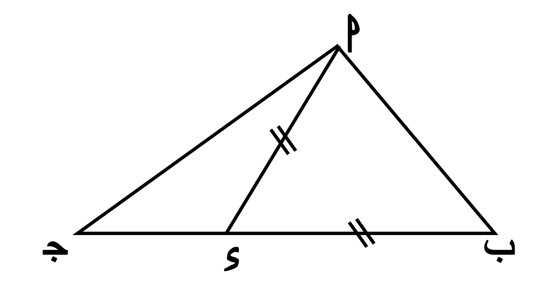
طول الضلع الثالث ∈] الفرق، المجموع [

طول الضلع الثالث ∈] ٣، ١١ [

---

(١) فى الشكل المقابل

م ء = ء ب   اثبت أن ب جـ > م جـ



فى Δ م ء جـ

∵ م ء + ء جـ > م جـ

∵ م ء = ء ب

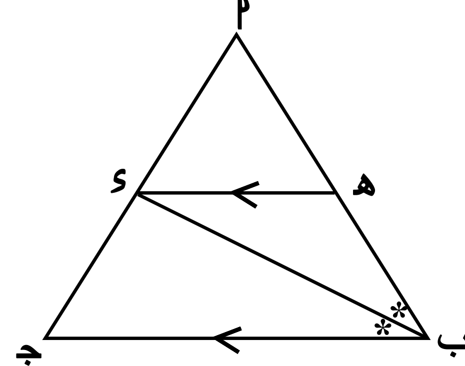
∴ ء ب + ء جـ > م جـ

∴ ب جـ > م جـ

(٢) فى الشكل المقابل

ب ء ينصف (∠ م ب جـ) ، هـ ء // ب جـ

اثبت أن م ب > م ء



∵ هـ ء // ب جـ

∴ ق(∠ هـ ء ب) = ق(∠ ء ب جـ) بالتبادل (١)

∵ ب ء ينصف (∠ م ب جـ)

∴ ق(∠ هـ ب ء) = ق(∠ ء ب جـ) (٢)

من ١ ، ٢

∴ ق(∠ هـ ب ء) = ق(∠ هـ ء ب)

∴ هـ ب = هـ ء

فى Δ م هـ ء

∵ م هـ + هـ ء > م ء

∵ هـ ب = هـ ء

∴ م هـ + هـ ب > م ء

∴ م ب > م ء

أكتب ذاكرولي في البحث وانضم لجروبات ذاكرولي من رياض الاطفال للصف الثالث الاعدادي